ALGEBRA LINEAL

Rocío Buitrago A

ALGEBRA LINEAL

ALGEBRA LINEAL



Álgebra Lineal

Impresión:
ALVI IMPRESORES LTDA.
Tel.: 2501584
alvimpresores@yahoo.es

Diseño Portada:
Carlos Peña M.

Diseño y diagramación:
ALVI IMPRESORES LTDA.
Milton Ruiz - migrafico@hotmail.com
Coordinacion editorial: División de Publicaciones y Comunicaciones UMNG.

Impreso en Colombia

UNIVERSIDAD MILITAR NUEVA GRANADA

Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemáticas



ÁLGEBRA LINEAL

Rocío Buitrago Alemán
Profesora de Matemáticas

Bogotá, D.C. 2009

INTRODUCCIÓN

"Que todo nuestro conocimiento empieza con la experiencia, es efectivamente cosa sobre la cual no hay duda . . . pero aunque nuestro conocimiento empieza con la experiencia, no nace todo él de la experiencia."

Enmanuel Kant.

Este texto ha sido elaborado teniendo en cuenta la presentación de elementos nuevos para los estudiantes, con un primer acercamiento a la abstracción y formalización de conceptos matemáticos.

Se desarrollan los contenidos básicos del curso de Álgebra Lineal, distribuidos en seis unidades modulares que se encuentran completamente interrelacionadas, de las cuales, las Matrices y los Vectores son los núcleos conceptuales.

El texto contiene suficientes ejemplos resueltos en forma detallada, haciendo énfasis especialmente en las interpretaciones geométricas, para su posterior aplicación en temas específicos de la ingeniería, como la mecánica de fluidos o la investigación de operaciones.

La utilización de los conceptos del álgebra lineal en las ciencias aplicadas es frecuente. Muchos problemas reales de la física, la economía y la ingeniería pueden ser modelados, con bastante precisión para su análisis y solución, mediante sistemas de ecuaciones lineales o mediante sistemas de fuerzas. Por otra parte, el manejo simultáneo de mucha información correlacionada, se puede realizar con mayor eficiencia cuando la presentación se hace en forma matricial.

Por las razones expuestas, espero que este texto proporcione nuevas herramientas de apoyo para la formación profesional de los estudiantes. Sin embargo, el éxito en los resultados del curso, depende no solo del buen uso de este material, sino de la disciplina con que se asuma el compromiso adquirido.

OBJETIVO GENERAL

Desarrollar en los estudiantes la capacidad de abstracción de conceptos y de formulación de modelos matemáticos, que se ajusten a la descripción y comportamiento de problemas reales de la ingeniería o de otras áreas del conocimiento como la biología o las ciencias sociales.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudiar las características y operaciones básicas entre matrices, para aplicarlas en diferentes temas de la ingeniería o de otras áreas del conocimiento.

- Estudiar para los sistemas de ecuaciones lineales: los tipos de solución y las correspondientes interpretaciones, métodos matriciales de solución y algunas aplicaciones a la ingeniería.

- Generalizar el cálculo de los determinantes de orden n y sus aplicaciones, a partir de las propiedades enunciadas con los determinantes de orden 2 y 3.

- Distinguir y aplicar las diferentes operaciones definidas con vectores en el plano ($\Re^2$) y en el espacio ($\Re^3$) y su generalización a $\Re^n$.

- Estudiar las características y aplicaciones de la estructura algebraica llamada espacio vectorial, haciendo abstracción de las operaciones definidas entre matrices y vectores.

- Identificar y representar matricialmente transformaciones lineales entre espacios vectoriales, en particular en el plano y en el espacio, con sus interpretaciones geométricas.

CONTENIDO

UNIDAD 1. MATRICES (1)

UNIDAD 2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (49)

UNIDAD 3. DETERMINANTES (97)

UNIDAD 4. VECTORES (135)

UNIDAD 5. ESPACIOS VECTORIALES (249)

UNIDAD 6. TRANSFORMACIONES LINEALES (301)

1. MATRICES

"Entender el significado de los invariantes representa un esfuerzo para reconocer lo que, por su forma, o color, o sentido, o lo que sea, es importante o significativo entre aquello que es solamente trivial o efímero. Un simple ejemplo de su falta de comprensión lo proporciona el examinando de Cambridge que aprendió perfectamente a convertir en factores $a^2 - b^2$ pero fracasó cuando el examinador le preguntó desconsideradamente por los factores $p^2 - q^2$."

H. W. Turnbull.

INTRODUCCIÓN

Un fenómeno frecuente en la historia de la matemática es sin duda, el que las herramientas matemáticas necesarias para las aplicaciones científicas, han sido inventadas muchos años antes de poder intuir la ciencia en la cual han tenido aplicación.

El álgebra de la matrices ha sido precisamente uno de ellas, y su estudio se considera una de las contribuciones más importantes por parte de Arthur Cayley, matemático inglés del siglo XIX. El tema de las matrices apareció en un escrito publicado por él en 1858, titulado "Memorias sobre la teoría de las matrices". Surgió de la observación sobre el comportamiento de las combinaciones de transformaciones lineales (unidad 6), en la teoría de los invariantes algebraicos.

La definición de la multiplicación entre matrices, por la cual se obtienen resultados diferentes según el orden en que se multiplique, parece no tener importancia práctica o científica. Sin embargo, 60 años después, Heisemberg encontró en el álgebra de matrices, el instrumento preciso para el desarrollo de su obra trascendental en la mecánica cuántica. En la actualidad, el desarrollo tecnológico ha evolucionado rápidamente a tal punto que, la aplicación de programas computacionales es imprescindible en todo proceso de optimización, en particular para el diseño de diferentes estructuras (edificios, puentes, motores, etc.), lo cual es posible gracias al manejo y aplicación de la teoría de las matrices en los campos vectoriales.

El manejo que se hace de las matrices en esta unidad, es principalmente operacional. Sin embargo, el tratamiento abstracto de las operaciones definidas y sus propiedades, permite reconocer posteriormente la estructura algebraica del conjunto de las matrices como un espacio vectorial (unidad 5).

OBJETIVO GENERAL

Estudiar las características y operaciones básicas entre matrices, para aplicarlas en diferentes temas de la ingeniería o de otras áreas del conocimiento, como las ciencias económicas y sociales.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar los elementos de una matriz, la caracterización de algunas matrices especiales y las operaciones elementales sobre sus filas o columnas.
- Definir las operaciones básicas entre matrices y sus propiedades, para aplicarlas en el planteamiento y solución de problemas relacionados con actividades de la ingeniería.
- Aplicar la matriz inversa en la solución de ecuaciones matriciales.

CONTENIDO

1.1. Generalidades de las matrices
1.1.1. Matrices especiales
1.1.2. Operaciones elementales sobre una matriz
1.1.3. Aplicaciones

1.2. Operaciones con matrices
1.2.1. Suma de matrices
1.2.2. Multiplicación escalar
1.2.3. Producto de matrices
1.2.4. Aplicaciones

1.3. Matriz inversa
1.3.1. Algoritmo para hallar la matriz inversa
1.3.2. Aplicaciones

1.1. GENERALIDADES DE LAS MATRICES

Las matrices son elementos adecuados para presentar mucha información correlacionada, en una forma organizada y práctica de analizar. Tal es el caso de los inventarios de existencias en algún depósito de materiales de construcción, o el reporte de notas de un estudiante durante los diferentes periodos de estudio.

Definición: Se llama MATRIZ REAL a un conjunto de números reales dispuestos en forma rectangular, dentro de un paréntesis redondo o cuadrado.
Los números dispuestos en forma horizontal se llaman FILAS y los dispuestos en forma vertical se llaman COLUMNAS.
El ORDEN de la matriz queda determinado por el número de filas y de columnas respectivamente.

Notación: Las matrices se denotan con letras mayúsculas, sus elementos con letras minúsculas y el orden en forma de subíndice.

$$A_{mxn} = (a_{ij})_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Fila 3 (F_3)

Columna 2 (C_2)

El elemento que se encuentra en la intersección de F_3 y C_2 es precisamente a_{32} .

Ejemplo:

$A_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ es una matriz de orden 2x3 porque tiene 2 filas y 3 columnas.

Las filas de A son: (1 –2 3) y (5 0 –1) que denotamos F_1 y F_2 respectivamente.

Las columnas de A son: $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ que denotamos C_1 , C_2 y C_3.

El elemento a_{23} = -1 es el elemento que se encuentra en la segunda fila y la tercera columna de la matriz A.

En forma análoga, designamos los otros elementos: $a_{21} = 5$; $a_{12} = -2$; $a_{22} = 0$; $a_{11} = 1$ y $a_{13} = 3$

Para esta matriz, no existe a_{32} porque hay solamente dos filas.

Definición: Dos MATRICES A y B del mismo orden son IGUALES, si y sólo si cada elemento a_{ij} de A, es igual al correspondiente elementos b_{ij} de B.

Si $A = (a_{ij})_{mxn}$ y $B = (b_{ij})_{mxn}$ entonces $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i, j$

Ejemplos:

1. Dadas $M = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 5 & x \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ z & 3 \end{pmatrix}$, M = N solo si: $a = 0$, $z = 5$ y $x = 3$.

2. Las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ no son iguales aunque sean del mismo orden y tengan los mismos elementos, porque $a_{21} \neq b_{21}$.

1.1.1. Matrices especiales.

Según el orden y ciertas características de los elementos, se identifican algunas matrices especiales.

Según el orden distinguiremos:

- Matriz FILA: es una matriz con una sola fila. $F_{1x5} = (2 \ \ -1 \ \ 0 \ \ 3 \ \ 5)$.

- Matriz COLUMNA: es una matriz con una sola columna. $C_{3x1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Matriz CUADRADA: es una matriz con igual cantidad de filas que de columnas.
  Se denota A_n y se lee "matriz de orden n".

$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 2.

Según las características de los elementos distinguiremos:

- **Matriz TRIANGULAR SUPERIOR:** es una matriz cuadrada en la cual los elementos por debajo de la diagonal principal son cero.

En forma análoga, se define matriz TRIANGULAR INFERIOR. La DIAGONAL PRINCIPAL comprende los elementos de la forma a_{ii}.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ es matriz triangular superior y la diagonal principal está formada por los elementos $b_{11} = 1$; $b_{22} = 1$; $b_{33} = -2$.

$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ es matriz triangular inferior. Los elementos de la diagonal principal son $g_{11} = -1$; $g_{22} = 0$; $g_{33} = 4$.

- **Matriz DIAGONAL:** es una matriz triangular inferior y superior al mismo tiempo.

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- **Matriz ESCALAR**: es una matriz diagonal en la cual los elementos de la diagonal principal son iguales.

$E = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ es una matriz escalar de orden 3 donde la constante en la diagonal principal es 1/2

- **Matriz IDÉNTICA**: es una matriz escalar en la cual la constante es uno.

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz idéntica de orden 2.

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz idéntica de orden 3.

- **Matriz NULA**: es una matriz de orden mxn en la cual todos los elementos son cero.

$O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz nula de orden 2.

$O_{2x3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz nula de orden 2x3.

- **Matriz TRANSPUESTA DE A**: es la matriz que se obtiene a partir de A, intercambiando filas por columnas. Se denota A^T

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ es matriz de orden 2x3, entonces la matriz transpuesta de A

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ es matriz de orden 3x2.

- **Matriz OPUESTA DE A:** es la matriz que se forma con los opuestos de los elementos de A_{mxn}. Se denota $-A_{mxn}$.

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ entonces $-A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ es la matriz opuesta de A.

- **Matriz SIMÉTRICA**: es una matriz cuadrada que es igual a su transpuesta.

$S = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz simétrica porque $S^T = S$

-**Matriz ANTISIMÉTRICA**: es una matriz cuadrada igual a la opuesta de su transpuesta.

$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz antisimétrica, porque es igual a la opuesta de la matriz transpuesta de K. Así: $K^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $-K^T = K$.

1.1.2. Operaciones elementales sobre una matriz.

Definición: Se llama OPERACIÓN ELEMENTAL sobre una matriz a cualquiera de las siguientes modificaciones:

- Intercambiar dos filas (o columnas). Se denota: $F_i \leftrightarrow F_j$ (o $C_i \leftrightarrow C_j$).
- Multiplicar todos los elementos de una fila (o columna) por una constante diferente de cero. Se denota: kF_i (o kC_j) , $k \neq 0$.
- Sumar término a término a una fila (o columna) otra fila (o columna) multiplicada por una constante se denota: $F_i + kF_j$ (o $C_i + kC_j$).

Las operaciones elementales se aplican convenientemente sobre una matriz de cualquier orden, con el fin de obtener la forma escalonada o reducida de la matriz.

Definición: Dos MATRICES A y B son EQUIVALENTES, si una de ellas se obtiene a partir de la otra por medio de una o mas operaciones elementales.

Se denota: $A \approx B$ y se lee: "A es equivalente a B".

Ejemplo:

Las siguientes matrices son equivalentes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Porque:

B se obtuvo a partir de A sumándole a la fila 2 la fila 1 multiplicada por –2: $F_2+(-2)F_1$.
C se obtuvo a partir de B multiplicando la fila 2 por (-1): $(-1)F_2$.
D se obtuvo a partir de C intercambiando la fila 2 con la fila 3: $F_2 \leftrightarrow F_3$.

Entonces: $A \approx B \approx C \approx D$ lo cual se denota de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición: Una matriz A de orden mxn se llama ESCALONADA POR FILAS si cumple las siguientes condiciones:

- Si existen filas nulas, aparecen en la parte inferior.
- El primer elemento no nulo de cada fila no nula, llamado **pivote**, es 1.
- En cada columna donde hay un pivote, los elementos por debajo de este son cero.
- Si i es mayor que j, el pivote de la fila-i está a la derecha del pivote de la fila-j.

Definición: Una matriz A de orden mxn se llama REDUCIDA POR FILAS si cumple las siguientes condiciones:

- Si existen filas nulas, son las últimas.
- El primer elemento no nulo de cada fila no nula, llamado **pivote**, es 1.
- En cada columna donde hay un pivote, el único elemento no nulo es el pivote.
- Si i es mayor que j, el pivote de la fila-i está a la derecha del pivote de la fila-j.

NOTA: En general, el **pivote** puede se cualquier número, pero por comodidad en este caso, se busca 1 en esa posición.

Teorema: Para cualquier matriz A de orden mxn:

(a) A es equivalente a una matriz escalonada por filas.
(b) A es equivalente a una matriz reducida por filas.

1.1.3. Aplicaciones

- Recopilación de información: Las matrices constituyen un instrumento muy útil para recopilar mucha información en una forma organizada y fácil de analizar.

Por ejemplo, la matriz $A = \begin{pmatrix} 22 & 36 & 54 \\ 20 & 40 & 52 \\ 28 & 45 & 65 \end{pmatrix}$ puede representar el número de metros cúbicos de agua demandados por familia al mes, en los estratos 2, 3 y 4 de tres municipios diferentes. Por la información que contiene, la matriz se puede llamar MATRIZ MUNICIPIO-CONSUMO, y se forma a partir de los datos reportados en la siguiente tabla:

MUNICIPIO	CONSUMO POR ESTRATOS (m^3/mes)		
	Estrato 1	Estrato 2	Estrato 3
CHÍA	22	36	54
MADRID	20	40	52
MELGAR	28	45	65

Otro ejemplo interesante, es la llamada MATRIZ ORIGEN-DESTINO de pasajeros en un sistema dado de transportes. Se forma con el número de pasajeros que se dirigen de un lugar a otro.

Por ejemplo la matriz $B = \begin{pmatrix} 1200 & 50 & 20 & 55 \\ 700 & 15 & 100 & 10 \\ 500 & 3 & 250 & 0 \\ 0 & 120 & 50 & 40 \end{pmatrix}$ se obtuvo de la siguiente tabla:

Destino / Origen	BOGOTÁ	TUNJA	IBAGUÉ	CAJICÁ
CHÍA	1200	50	20	55
MADRID	700	15	100	10
MELGAR	500	3	250	0
BOGOTÁ	0	120	50	40

Así, el elemento $b_{34} = 0$ de la matriz B, se interpreta como la ausencia de pasajeros que viajen de Melgar a Cajicá; $b_{11} = 1200$ indica que el mayor flujo de pasajeros se presenta de Chía hacia Bogotá.

En la unidad 2 de este módulo, se verá que las matrices son un buen instrumento para el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.

- Matrices especiales: Algunas matrices se definen especialmente para describir la información que se quiere recopilar. Tal es el caso de la llamada MATRIZ ESTOCÁSTICA, que se caracteriza por ser una matriz cuadrada cuyos elementos son probabilidades y la suma de sus columnas debe ser igual a 1.

Algunos ejemplos de matrices estocásticas son: $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 3/8 \\ 1/3 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ porque:

La suma de los elementos en cada columna es 1 y todos los elementos están entre 0 y 1, es decir, son probabilidades.

La siguiente matriz estocástica (verifíquelo) recoge la información recopilada en un estudio de usos del suelo en una ciudad, de 1980 a 1990:

$$U = \begin{pmatrix} 0.47 & 0.03 & 0.03 & 0.19 & 0.33 \\ 0.18 & 0.48 & 0.08 & 0.28 & 0.11 \\ 0.22 & 0.28 & 0.08 & 0.47 & 0.15 \\ 0.05 & 0.13 & 0.79 & 0.06 & 0.35 \\ 0.08 & 0.08 & 0.02 & 0.00 & 0.06 \end{pmatrix}$$

En esta matriz, por filas se lee el uso del suelo en 1980 y por columnas, el uso del suelo en 1990. Los usos considerados en orden de filas y de columnas son:

1. Residencial.
2. Comercial.
3. Industrial.
4. Transporte.
5. Baldío.

Cualquier elemento u_{ij} representa la probabilidad de que el suelo que tuvo uso j en 1980, pasara a un uso i en 1990. Así por ejemplo, el elemento u_{32} = 0.28 nos indica que el suelo con uso industrial en 1980, tenía una probabilidad de 0.28 de convertirse en área comercial en 1990. Los elementos de la diagonal principal dan la probabilidad de que el uso del suelo no cambiara.

Otro tipo de modelo especial son las matrices de COMUNICACIÓN, donde cada elemento c_{ij} es 1 si i se comunica con j y 0 si no se comunican, lo que hace que estas matrices sean siempre simétricas (igual a su transpuesta). Algunos ejemplos de estas matrices son:

$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ que se pueden representar por medio de grafos como

se ilustra en las figuras 1(a) y 1(b) respectivamente

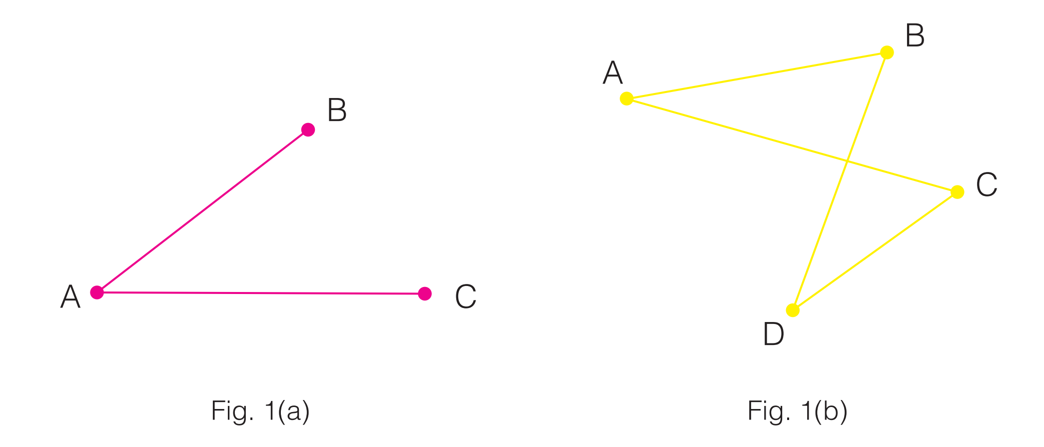


Fig. 1(a) Fig. 1(b)

En cada **grafo** (conjunto de puntos y líneas), los puntos representan ciudades y las líneas carreteras entre ellos. La figura 1(a) indica que la ciudad A se comunica con B y con C, pero B y C no están comunicadas. ¿Cómo interpreta la figura 1(b) ?

- Matrices escalonadas y reducidas: Una matriz de cualquier orden mxn, se puede llevar a la forma escalonada o reducida por medio de operaciones elementales sobre las filas.

La secuencia más conveniente para llevar una **matriz** a la forma **escalonada** por filas, se describe mediante el siguiente **algoritmo**: (es sólo una sugerencia).

- Buscar el pivote de la primera fila con cualquiera de las 3 operaciones elementales.
- Volver cero los elementos por debajo del pivote de la fila 1 con la operación de la forma $F_i + kF_j$.
- Buscar el pivote de la segunda fila, teniendo cuidado de que quede a la derecha del pivote de la primera fila.
- Volver cero los elementos por debajo del pivote de la fila 2.
- Continuar el proceso hasta terminar con todas las filas de la matriz.

Ejemplo:

Llevar la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ a la forma escalonada por filas.

Solución: Aplicando el algoritmo se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4+2F_1]{F_3-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -9 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_4+5F_2]{F_3-6F_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -21 & -7 \\ 0 & 0 & 18 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\left(-\frac{1}{7}\right)F_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 18 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{6}F_4} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_4-F_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}F_3} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -3 & 4 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

La matriz B es la forma escalonada de la matriz A, ya que como se puede observar, se cumplen las condiciones de la definición: los pivotes son 1, por debajo de cada uno de ellos aparecen ceros solamente y los pivotes se desplazan a la derecha, y la fila de cero está en la parte inferior. Además $A \approx B$.

La secuencia más conveniente para llevar una **matriz** a la forma **reducida** por filas se describe mediante el siguiente **algoritmo**:

- Buscar el pivote de la primera fila.
- Volver cero los demás elementos de la columna donde está el pivote de la fila 1 con la operación de la forma $F_i + kF_j$.
- Buscar el pivote de la segunda fila, teniendo cuidado de que quede a la derecha del pivote de la primera fila.
- Volver cero los elementos de la columna donde está el pivote de la fila 2.
- Continuar el proceso hasta terminar con todas las filas de la matriz.

Ejemplo:

Llevar la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ a la forma reducida por filas

Solución: Siguiendo la secuencia indicada en el algoritmo tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2+2F_1 \\ F_3-4F_1 \\ F_4-F_1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 14 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -14 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 14 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 14/3 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1-F_2} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & \textcircled{1} & 14/3 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

La matriz B es la forma reducida de la matriz A, pues cumple las condiciones de la definición: las filas nulas aparecen abajo, en cada columna donde hay un pivote, éste es el único elemento no nulo, y el pivote de la fila 2 está a la derecha del pivote de la fila 1.

Ejercicios propuestos:

1. En un experimento de laboratorio se tomó el tiempo en que dos grupos de bloques de concreto de diferente tamaño, con 4 mezclas diferentes se compactaban. Los bloques de menor tamaño lo hicieron en 8, 6, 5 y 7 horas. Los bloques de mayor tamaño lo hicieron en 22, 14, 18 y 12 horas. Escriba esta información en una matriz.

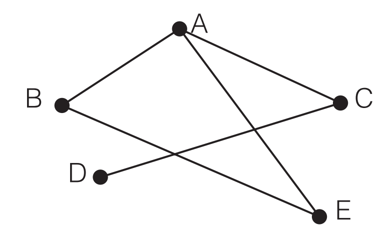
2. Una compañía tiene sus reportes de ventas mensuales dados por medio de matrices cuyas filas, en orden representan el número de modelos regular, de lujo y extra vendidos, mientras que las columnas dan el número de unidades rojas, blancas, azules y verdes vendidas. Las matrices para enero (E) y febrero (F) son:

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

a) ¿En enero, cuántas unidades blancas del modelo extra se vendieron?
b) ¿En febrero, cuántos modelos de lujo azules se vendieron?
c) ¿En qué mes se vendieron mas modelos regulares verdes?
d) ¿De qué modelo y color se vendió el mismo número de unidades en los 2 meses?
e) ¿En qué mes se vendieron mas modelos de lujo?
f) ¿En qué mes se vendieron mas artículos rojos?
g) ¿Cuántos artículos se vendieron en enero?

3. a) Construya el grafo asociado a la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Escriba la matriz asociada al siguiente grafo:



4. Encuentre valores de x, y y z para que $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ x & 7 \\ 3y & 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 7 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

5. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}7&0\\0&6\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&10&-3\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix};\ E=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix};\ G=\begin{pmatrix}1&1&5&0&-1\\0&3&15&-12&21\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix};\ H=\begin{pmatrix}0&0&0&8\\0&0&8&0\\0&8&0&0\\8&0&0&0\end{pmatrix};\ R=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-2&0&0\\3&0&0\end{pmatrix}$$

a) ¿Cuáles son diagonales?
b) ¿Cuáles son triangulares (superior o inferior)?
c) ¿Cuáles son escalares?
d) ¿Cuáles son simétricas?
e) ¿Cuáles son antisimétricas?

6. Escribir las siguientes matrices, de acuerdo a las definiciones dadas:

a) $A_{4x5}=(a_{ij})$ tal que $a_{ij}=\begin{cases}0 & si \quad i<j\\ -1 & si \quad i=j\\ i & si \quad i>j\end{cases}$

b) $B_{5x4}=(b_{ij})$ tal que $b_{ij}=\begin{cases}5 & si \quad i\neq j\\ 7+j & si \quad i=j\end{cases}$

7. Lleve las siguientes matrices a la forma reducida por filas:

a) $\begin{pmatrix}0&2&-3\\-2&0&0\\3&0&0\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}0&0&0&8\\0&0&8&0\\0&8&0&0\\8&0&0&0\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1&1&5&0&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&3&15&-12&21\end{pmatrix}$

8. Justifique por qué en una matriz antisimétrica, los elementos de la diagonal principal siempre son cero.

1.2. OPERACIONES CON MATRICES

Se definen tres operaciones básicas entre matrices: la suma, la multiplicación escalar (o multiplicación por un escalar) y el producto, cada una de ellas con características y propiedades diferentes.

La suma se efectúa entre dos matrices del mismo orden y el resultado es una matriz del mismo orden.

La multiplicación escalar se efectúa entre una matriz y un real, y el resultado es una matriz del mismo orden.

El producto se define entre dos matrices que deben ser cuadradas del mismo orden, y el resultado es otra matriz del mismo orden; ó, entre matrices de diferente orden con cierto condicionamiento para el orden de cada una de ellas y el resultado es una matriz de orden diferente al de los factores.

1.2.1. Suma de matrices

Definición: Dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de orden mxn, se define la SUMA de A y B como otra matriz $C = (c_{ij})$ de orden mxn donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$C_{mxn} = A_{mxn} + B_{mxn} = (a_{ij} + b_{ij}) = (c_{ij})$$

Ejemplo:

Si $A_{2x3} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $B_{2x3} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ -3 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ entonces:

$$C_{2x3} = \begin{pmatrix} 2+8 & 8-1 & 3+0 \\ 1-3 & 0+10 & -3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 3 \\ -2 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

1. Clausurativa: $A_{mxn} + B_{mxn} = C_{mxn}$

Esto quiere decir que 2 matrices del mismo orden siempre se pueden sumar y el resultado es una matriz del mismo orden.

2. Conmutativa: A + B = B + A

Significa que el orden en que se suman las matrices no afecta el resultado.

Demostración: Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ entonces:

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ definición de suma de matrices.
$= (b_{ij} + a_{ij})$ + es conmutativa en $\Re$.
$= B + A$ definición de suma de matrices.

3. Asociativa: (A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C

Quiere decir que se pueden sumar más de 2 matrices, sin que la forma de agruparlas afecte el resultado, por lo que se puede prescindir de los paréntesis.

Demostración: Si $A = (a_{ij})$; $B = (b_{ij})$ y $C = (c_{ij})$ entonces:

$(A + B) + C = (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij})$ definición de suma de matrices.
$= ([a_{ij} + b_{ij}] + c_{ij})$ definición de suma de matrices.
$= (a_{ij} + [b_{ij} + c_{ij}])$ + es asociativa en $\Re$.
$= (a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij})$ definición de suma de matrices.
$= A + (B + C)$ definición de suma de matrices.

4. Modulativa: $\forall A_{mxn}$, $A + O_{mxn} = O_{mxn} + A = A$

Significa que O_{mxn} es el MÓDULO de la suma de matrices porque, cualquier matriz sumada con la matriz nula del mismo orden no cambia.

Demostración: $A + O = (a_{ij} + 0_{ij})$ definición de suma de matrices.
$= (a_{ij})$ 0 es el módulo de la suma de reales.
$= A$ definición de la matriz A.

5. Invertiva: $\forall A_{mxn}$, $\exists (-A)_{mxn}$ tal que $A + (-A) = O_{mxn} = (-A) + A$

Toda matriz sumada con su opuesta, da como resultado la matriz nula del mismo orden.

Demostración: $A + (-A) = (a_{ij} + (-a_{ij}))$ definición de suma de matrices.
$= (0_{ij})$ $a - a = 0$ para todo $a \in \Re$.
$= O_{mxn}$ definición de la matriz nula.

1.2.2. Multiplicación escalar

Definición: Dada una matriz $A_{mxn} = (a_{ij})$ de orden mxn y una constante $r \in \Re$, se define la MULTIPLICACIÓN ESCALAR de A por r como $r\,A_{mxn} = (r\,a_{ij}) = B_{mxn}$

Se dice que B es MÚLTIPLO ESCALAR de A.

Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ entonces:

$$2A = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & -1\cdot 2 & 3\cdot 2 & 5\cdot 2 \\ 3\cdot 2 & 0\cdot 2 & -2\cdot 2 & 4\cdot 2 \\ 4\cdot 2 & 5\cdot 2 & 6\cdot 2 & 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & 10 \\ 6 & 0 & -4 & 8 \\ 8 & 10 & 12 & 2 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}A = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & -3/2 & -5/2 \\ -3/2 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & -5/2 & -3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{3}A = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 & 2 & 10/3 \\ 2 & 0 & -4/3 & 8/3 \\ 8/3 & 10/3 & 4 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

1. Para toda matriz A_{mxn} , $1A = A$; $(-1)A = -A$; $0A = O_{mxn}$.
2. Si $r, s \in \Re$ y A_{mxn} : $(r\,.\,s)\,A = r\,(sA)$.
3. Si $r, s \in \Re$ y A_{mxn} : $(r + s)\,A = r\,A + sA$.
4. Si $r \in \Re$ y A_{mxn} , B_{mxn} : $r(A + B) = r\,A + rB$.

Nota: En la propiedad **1**, 1 es el módulo para la multiplicación escalar.
$0 \in \Re$ y O es la matriz nula de orden mxn.

En la propiedad **2**, al lado izquierdo, la multiplicación entre paréntesis es de reales y la de afuera es escalar. Sin Embargo, en el lado derecho, las dos multiplicaciones son escalares.

En la propiedad **3**, la suma de la derecha es de matrices, pero la suma de la izquierda es de reales.

En la propiedad **4**, las dos sumas son de matrices.

Teorema: Si A y B son matrices de orden mxn entonces

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(rA)^T = rA^T$

(3) $(A + B)^T = A^T + B^T$

Demostración: (3): Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ entonces:

$$
\begin{aligned}
(A + B)^T &= (a_{ij} + b_{ij})^T && \text{definición de suma de matrices.}\\
&= (a_{ji} + b_{ji}) && \text{definición de matriz transpuesta.}\\
&= (a_{ji}) + (b_{ji}) && \text{definición de suma de matrices.}\\
&= A^T + B^T && \text{definición de } A^T \text{ y } B^T.
\end{aligned}
$$

Ejemplos:

1. Si $D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ encuentre una matriz X de orden 2 tal que:

$3D - E^T + 2X = O_2$

Solución:

En la ecuación matricial dada, se puede "despejar" X aplicando convenientemente las propiedades de la suma de matrices y de la multiplicación escalar:

$$3D - E^T + 2X = O \Rightarrow 2X = E^T - 3D \Rightarrow X = (E^T - 3D) \Rightarrow X = \frac{1}{2}E^T - \frac{3}{2}D$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 15/2 \\ 6 & 3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 9/2 & -15/2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ verificar que $\left(\frac{1}{4}A\right)^T = \frac{1}{4}A^T$.

Verificación:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{4}A = \begin{pmatrix} 2/4 & 3/4 \\ 4/4 & -1/4 \\ 8/4 & 0/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 \\ 1 & -1/4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}A\right)^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 3/4 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{4}A^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 3/4 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Como se observa en los dos resultados anteriores: $\left(\frac{1}{4}A\right)^T = \frac{1}{4}A^T$.

3. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ verificar que $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Verificación:

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Se comprueba entonces que los dos resultados son iguales.

1.2.3. Producto de matrices

La condición necesaria para poder multiplicar dos matrices, es que sean cuadradas del mismo orden, o que el número de columnas en la primera matriz sea igual al número de filas en la segunda.

Definición: Dadas dos matrices A = (a_{ij}) de orden mxn y B = (b_{ij}) de orden nxp, se define el PRODUCTO de A y B como una matriz C = (c_{ij}) de orden mxp, donde cada c_{ij} es el producto de la i-ésima fila de A con la j-ésima columna de B.

$$A.B = C = (c_{ij}) \quad \text{donde} \quad c_{ij} = F_{iA} \cdot C_{jB} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

C_{ij} se obtiene multiplicando término a término la i-ésima fila de A y la j-ésima columna de B y sumando los resultados.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix} \text{ entonces:}$$

$$c_{ij} = F_{iA} \cdot C_{jB} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

Nota: Si las dos matrices A y B son cuadradas de orden n, la matriz producto es una matriz cuadrada de orden n.

Si A es una matriz de orden mxn, B "debe" ser una matriz de orden nxp (el número de filas en B tiene que ser igual al de columnas en A), y la matriz producto es una matriz de orden mxp (con tantas filas como la matriz A y tantas columnas como la matriz B).

Ejemplos:

1. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ entonces $AB = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Donde $c_{11} = F_{1A}.C_{1B} = (2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ = 2.1 + 1.(-1) = 2 – 1 = 1.

$c_{12} = F_{1A}.C_{2B} = (2 \quad 1)\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ = 2.(-2) + 1.2 = -4 + 2 = -2.

$c_{21} = F_{2A}.C_{1B} = (3 \quad 4)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ = 3.1 + 4.(-1) = 3 – 4 = -1.

$c_{22} = F_{2A}.C_{2B} = (3 \quad 4)\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ = 3.(-2) + 4.2 = -6 + 8 = 2.

2. Si $A_{2x3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $B_{3x4} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 8 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ entonces:

$AB = C_{2x4} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 1 & 17 \\ 3 & -5 & -13 & 12 \end{pmatrix}$ donde:

$c_{11} = F_{1A}.C_{1B} = (2 \quad 3 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ = 2.0 + 3.3 + 0.0 = 0 + 9 + 0 = 9.

$c_{12} = F_{1A}.C_{2B} = (2 \quad 3 \quad 0)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ = 2.(-2) + 3.1 + 0.2 = -4 + 3 + 0 = -1.

$c_{13} = F_{1A}.C_{3B} = (2 \quad 3 \quad 0)\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ = 2.8 + 3.(-5) + 0.0 = 16 – 15 + 0 = 1.

$c_{14} = F_{1A}.C_{4B} = (2 \quad 3 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ = 2.1 + 3.5 + 0.(-2) = 2 + 15 + 0 = 17.

$c_{21} = F_{2A}.C_{1B} = (-1 \quad 1 \; -4).\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1).0 + 1.3 + (-4).0 = 0 + 3 + 0 = 3$.

$c_{22} = F_{2A}.C_{2B} = (-1 \quad 1 \; -4).\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1).(-2) + 1.1 + (-4).2 = 2 + 1 - 8 = -5$.

$c_{23} = F_{2A}.C_{3B} = (-1 \quad 1 \; -4).\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1).8 + 1.(-5) + (-4).0 = -8 - 5 + 0 = -13$.

$c_{24} = F_{2A}.C_{4B} = (-1 \quad 1 \; -4).\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = (-1).1 + 1.5 + (-4).(-2) = -1 + 5 + 8 = 12$.

Como la condición para poder multiplicar dos matrices es que el número de columnas en la primera matriz sea igual al número de filas en la segunda, el **producto de matrices no es conmutativo.** ¿Parece extraño? Siempre había funcionado aquello de que "el orden de los factores no altera el producto", pero en el caso de las matrices, esa afirmación no es válida.

3. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ entonces $AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ pero $BA = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$
y por tanto $AB \neq BA$.

4. Si $A_{2x3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $B_{3x4} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 8 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ entonces AB existe pero

BA no existe porque no se cumple la condición para efectuar el producto.

5. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ tanto AB como BA existen pero son de diferente

orden, es decir $AB \neq BA$: $AB = \begin{pmatrix} 15 & 11 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ pero $BA = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 14 \\ 5 & 1 & 9 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}$.

Sin embargo, hay caso en que la conmutatividad si se cumple:

6. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ entonces $AB = \begin{pmatrix} 11 & 13 \\ 13 & 11 \end{pmatrix} = BA$.

7. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ entonces $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Notación: $A_n.A_n = A_n^2$

En general, $A_n.A_n. \ldots A_n = A_n^k$, si A_n se tomó k veces como factor.

Propiedades:

1. Asociativa $(A.B).C = A.(B.C) = A.B.C$.

Verificación: Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ entonces:

$$[AB]C = \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 10 \\ -2 & 12 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & -40 \\ -5 & 28 \end{pmatrix}$$

$$A[BC] = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 & 16 \\ 22 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & -40 \\ -5 & 28 \end{pmatrix}$$

Se concluye por tanto que: $[AB]C = A[BC]$.

2. Distributiva $A.(B + C) = A.B + A.C$

Verificación: Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ entonces:

$$A[\,B + C\,] = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 9 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 27 & 17 \\ -1 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 27 & 13 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 27 & 17 \\ -1 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Observando los resultados anteriores se concluye que A [B + C] = AB + AC.

Nota: Al efectuar el producto en la propiedad distributiva, se debe respetar el orden en que están escritos los factores, dado que el producto de matrices no es conmutativo.

3. Modulativa $A_{mxn}.I_n = A_{mxn} = I_m.A_{mxn}$; $D_n.I_n = D_n = I_n.D_n$

Verificación: Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ entonces:

$$I_2.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A.I_2$$

$$I_2.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B.I_3.$$

Nota: Observe que la matriz idéntica es el módulo para el producto de matrices, pero si la matriz no es cuadrada, el orden de la matriz idéntica, no es el mismo si se multiplica a la derecha, que si se multiplica a la izquierda.

1.2.4. Aplicaciones

De la suma: Un laboratorio farmacéutico produce cierto medicamento. Los costos relativos a la compra y transporte de cantidades específicas de las sustancias necesarias para su

elaboración, adquiridas en dos localidades (suministradoras) distintas, están dados en las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 5 & 17 & 3 \\ 12 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & 15 & 2 \\ 13 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, donde las filas contienen la información acerca de los costos de compra (fila 1) y transporte (fila 2), respecto a cada una de las tres sustancias a, b y c (columnas), respectivamente.

La matriz que representa los costos totales de compra y transporte de cada una de las sustancias está dada por $A + B = \begin{pmatrix} 12 & 32 & 5 \\ 25 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ en la cual, la primera fila se refiere a los costos globales de compra y la segunda, a los de transporte de las sustancias para el medicamento.

De la multiplicación escalar: Un distribuidor de materiales para construcción normalmente despacha pedidos de 4 tipos de recebo en 3 depósitos.

El mes pasado recibió los siguientes pedidos $V = \begin{pmatrix} 20 & 48 & 60 & 24 \\ 36 & 64 & 24 & 40 \\ 44 & 72 & 48 & 60 \end{pmatrix}$

y para el próximo mes espera aumentar 4 veces el volumen de ventas.

La matriz que representa las ventas del mes entrante es $4V = \begin{pmatrix} 80 & 192 & 240 & 96 \\ 144 & 256 & 96 & 160 \\ 176 & 288 & 192 & 240 \end{pmatrix}$.

Del producto: Un contratista ha aceptado construir 5 casas estilo rústico, 7 estilo moderno y 12 estilo colonial. Entonces, su contrato se puede representar por la matriz fila $P = (5 \;\; 7 \;\; 12)$.

Los materiales que utilizará en cada tipo de construcción son acero, madera, vidrio, pintura y mano de obra. El número de unidades de cada material que se usará en cada tipo de casa están dadas en la matriz:

$M = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix}$,donde cada fila indica la cantidad de material necesario para un tipo de casa (rústica, moderna y colonial respectivamente), y cada columna indica la cantidad de un material dado (acero, madera, vidrio, pintura y mano de obra) para cada tipo de casa.

Las cantidades de cada material que el contratista debe pedir para cumplir con su contrato están dadas por la matriz:

$$PM = (5\ \ 7\ \ 12)\begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix} = (146\ \ 526\ \ 260\ \ 158\ \ 388)$$

, es decir, el contratista debe ordenar 146 unidades de acero, 526 de madera, 260 de vidrio y 158 de pintura.

Además, el contratista quiere calcular los costos que le demandan estos materiales si el acero cuesta $1600 por unidad, la madera $800 por unidad, el vidrio $500 por unidad, la pintura $100 por unidad y la mano de obra $1000.

Si estos datos se representan por una matriz columna $C = \begin{pmatrix} 1500 \\ 800 \\ 500 \\ 100 \\ 1000 \end{pmatrix}$ la matriz MC da el costo para cada tipo de casa:

$$MC = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1500 \\ 800 \\ 500 \\ 100 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49200 \\ 52800 \\ 46500 \end{pmatrix}.$$

El costo total de materiales para todas las casas está dado por:

$$P(\ MC\ ) = (5\ \ 7\ \ 12)\begin{pmatrix} 49200 \\ 52800 \\ 46500 \end{pmatrix} = 1'173.600.$$

El costo total para el contratista es de $1’173.600.

Ejercicios propuestos:

1. Determine los valores de a, b, c y d tales que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 18 \\ -2 & 6 & 11 \\ 15 & 17 & 13 \end{pmatrix}$ halle una matriz B que sea múltiplo escalar de A y tal que $b_{13} = 6$.

3. Si $A = \begin{pmatrix} 13 & 5 & 12 \\ 17 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -6 & 11 & 3 \\ 15 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ halle la matriz M tal que $A - 2M = 3B$.

4. Muestre que la matriz $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ satisface la ecuación $X^2 - 5X + 4I_2 = O_2$.

5. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

verifique que $AX = BX$ aunque $A \neq B$.

6. Calcule el producto $(x\ y\ z)\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

7. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, verifique que $A^3 = 5I_3$.

8. Una matriz A se llama IDEMPOTENTE si $A^2 = A$, verifique que la matriz

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ es idempotente.

9. Para cualquier matriz A de orden mxn, se cumple que $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$ donde $\frac{1}{2}(A + A^T)$ es una matriz simétrica y $\frac{1}{2}(A - A^T)$ es una matriz antisimétrica.

Exprese la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

10. Halle las matrices X y Y que satisfacen las ecuaciones $\begin{cases} X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

11. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ ¿existe una matriz C tal que CA = B? Justifique su respuesta.

12. Encuentre una formula para A^n donde n es un entero positivo, si A es la matriz:

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1.3. MATRIZ INVERSA

Definición: Se dice que una matriz A de orden n es INVERTIBLE o NO-SINGULAR, si es posible encontrar otra matriz B del mismo orden tal que: $A.B = I_n = B.A.$
En caso contrario, se dice que la matriz es SINGULAR O NO-INVERTIBLE.
B se llama MATRIZ INVERSA de A y se denota como $B = A^{-1}$.

Recordemos que la matriz idéntica es el módulo para el producto de matrices. Por tanto, si A es matriz invertible de orden n, el producto de ella con su inversa A^{-1} (de orden n también) debe dar como resultado la matriz idéntica de orden n, es decir:

$$A_n A_n^{-1} = I_n = A_n^{-1} A_n$$

Ejemplos:

1. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible porque:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no es singular porque, si $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,se tendría

$\begin{pmatrix} c & d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de donde resulta la inconsistencia: $c= 1$ y $c= 0$.

Por tanto, no existe una matriz B tal que AB = I = BA,

Teorema: Si A_n es matriz invertible, entonces la matriz inversa A_n^{-1} es única.

Demostración:
Supongamos que B y C son matrices inversas de A, es decir:
AB = BA = I y AC = CA = I .
Como el producto de matrices es asociativo: $C(AB) = (CA)B \Rightarrow CI = IB \Rightarrow C = B.$

Teorema: Dadas A y B matrices cuadradas del mismo orden:

(a) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ si A es no-singular.
(b) $(A B)^T = B^T A^T$.

Verificación:

Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$, entonces $(A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$; $A^T = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, entonces $(A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Los resultados anteriores comprueban la parte (a). Verifique la parte (b).

Teorema: Si A y B son matrices invertibles entonces AB es una matriz invertible y

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

En general, si $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ son matrices invertibles, entonces el producto de todas estas matrices es invertible y se tiene:

$$(A_1 A_2 A_3 \ldots A_n)^{-1} = A_n^{-1} A_{n-1}^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1} \ .$$

Verificación:

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ entonces $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ porque $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $B = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ entonces $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ porque $\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto $AB = \begin{pmatrix} 13 & 37 \\ 19 & 54 \end{pmatrix}$ es una matriz invertible y por el teorema $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Entonces: $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -54 & 37 \\ 19 & -13 \end{pmatrix}$, porque:

$$\begin{pmatrix} 13 & 37 \\ 19 & 54 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -54 & 37 \\ 19 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$, es decir, $(AB)[B^{-1} A^{-1}] = I$.

Como habrá notado en los ejemplos anteriores, sólo se ha considerado matrices de orden 2, esto obedece a que el proceso para hallar la matriz inversa de estas matrices es relativamente sencillo.

Veamos el mecanismo para obtener la matriz inversa de una matriz de orden 2:

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se define el determinante de A como: $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$

Si $\det(A) \neq 0$ entonces A es invertible y $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$.

Si $\det(A) = 0$ entonces A es singular y A^{-1} no existe.

Ejemplos:

1. Compruebe que $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ es invertible y encuentre la matriz inversa.

Solución:

Primero se calcula el determinante de A : $\det(A) = 3.5 - 3.6 = 15 - 18 = -3$.

Como $\det(A) \neq 0$ existe A^{-1} y utilizamos la forma general de la matriz; en este caso :

$a = 3$; $b = 3$; $c = 6$ y $d = 5$ por tanto $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/-3 & -3/-3 \\ -6/-3 & 3/-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Se puede comprobar que este resultado es correcto, porque $A A^{-1} = A^{-1} A = I$.

2. Compruebe que la matriz $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

Solución:

Basta con calcular el determinante: $\det(M) = 3.4 - (-2)(-6) = 12 - 12 = 0$.

Como $\det(M) = 0$ la matriz es singular o no-invertible, es decir M^{-1} no existe.

Para decidir si una matriz cuadrada A de cualquier orden tiene inversa, se debe calcular su determinante; si este es diferente de cero existe la matriz inversa, en caso contrario no existe. Pero este proceso para matrices de orden mayor de 3 es muy dispendioso (ver unidad 3), por lo que se recurre a la forma reducida de la matriz: si coincide con la matriz idéntica existe la inversa, en caso contrario no existe.

1.3.1. Algoritmo para hallar la matriz inversa

A continuación se describe el proceso generalizado para hallar la inversa de una matriz cuadrada de cualquier orden.

Algoritmo:

. Escribir la matriz aumentada (A : I) donde I es la matriz idéntica del mismo orden de A.

. Llevar la matriz (A : I) a la forma reducida por filas (C : D).

. Si la matriz C de la forma reducida es la matriz idéntica entonces la matriz D es la inversa de A.

Ejemplos:

1. Hallar si existe, la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución: Aplicando el algoritmo,

Se escribe la matriz aumentada (A : I) = $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Se lleva esta matriz a la forma reducida por filas:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2+2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+2F_3]{F_1+2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) = (\, C : D\,) \text{ forma reducida.}$$

Como en la forma reducida (C : D) C = I entonces la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 2/3 \\ 2 & 5/3 & 2/3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Este resultado se puede comprobar efectuando los productos $A\,A^{-1}$ y $A^{-1}A$ y en los dos casos el resultado es I_3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 2/3 \\ 2 & 5/3 & 2/3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 2/3 \\ 2 & 5/3 & 2/3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Hallar si existe, la inversa de la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -9 \\ 3 & 5 & -9 \end{pmatrix}$.

Solución: Siguiendo el algoritmo se tiene:

$$(B:I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&5&1&0&0\\0&3&-9&0&1&0\\3&5&-9&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3-3F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&5&1&0&0\\0&3&-9&0&1&0\\0&8&-24&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&5&1&0&0\\0&3&-9&0&1&0\\0&8&-24&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{3}F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&5&1&0&0\\0&1&-3&0&1/3&0\\0&8&-24&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&5&1&0&0\\0&1&-3&0&1/3&0\\0&8&-24&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1+F_2]{F_3-8F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&1/3&0\\0&1&-3&0&1/3&0\\0&0&0&-3&-8/3&1\end{array}\right)=(C:D)$$

Como en la matriz C de la forma reducida aparece una fila nula, esta matriz no es equivalente a la idéntica y por tanto la matriz B no tiene inversa. Es decir, B es una matriz singular.

1.3.2. Aplicaciones

La aplicación más frecuente del concepto de matriz inversa es para la solución de ecuaciones matriciales de la forma $AX = B$, donde A es una matriz invertible de orden n, X es la matriz que se va a calcular (la incógnita).

Si X es de orden nxm, B también debe ser de orden nxm, entonces la ecuación se resuelve aplicando las propiedades del producto de matrices:

$AX = B \Rightarrow$	$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$	se multiplica a los 2 lados por A^{-1}	(1).
$\Rightarrow$	$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$	propiedad asociativa	(2).
$\Rightarrow$	$I_n X = A^{-1}B$	definición de matriz invertible	(3).
$\Rightarrow$	$X = A^{-1}B$	I_n es el módulo del producto de matrices	(4).

Nota: Observe que en el paso (1) el producto por A^{-1} se hace del lado izquierdo a los dos lados, debido a que el producto de matrices no es conmutativo. En el paso (4), tenga en cuenta que I_n es módulo a izquierda porque X es de orden nxm.

En general, al resolver una ecuación no es necesario realizar todo el proceso anterior, solo se utiliza el resultado, es decir:

$A_n X_{nxm} = B_{nxm} \Rightarrow X = A^{-1}B$ si y solo si A es matriz invertible.

Ejemplos:

1. Resolver la ecuación $M\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$.

Solución:
Primero se verifica que la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ es invertible.

Como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$ = 6 + 2 = 8 la matriz inversa existe, entonces:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/4 & -1/8 \\ 1/4 & 3/8 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Se comprueba que el resultado es correcto remplazando M en la ecuación y multiplicando:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Hallar las coordenadas del punto P (1, 2) respecto al sistema de coordenadas X'Y' que se obtiene de rotar el sistema inicial XY un ángulo de 45^0 respecto al origen.

Solución:

Si un sistema de coordenadas XY del plano cartesiano se rota un ángulo θ respecto al origen, se genera otro sistema X'Y', entonces a un punto P del plano le corresponden dos pares de coordenadas: el par (x, y) respecto al sistema XY y el par (x', y') respecto al sistema X'Y' (figura 1.2). Estos 2 pares de coordenadas se relacionan por medio de las siguientes ecuaciones trigonométricas:

$x = x'\cos\theta - y'sen\theta$ y $y = x'sen\theta + y'\cos\theta$ (ver pagina 306)

, las cuales se pueden expresar como una ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Si se efectúa el producto y se aplica la definición de igualdad de matrices, se obtienen las dos ecuaciones.

$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ se llama matriz de rotación y $\begin{pmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ es su inversa.
θ es el ángulo de rotación.

La matriz de rotación permite hallar las coordenadas iniciales a partir de las coordenadas en el sistema rotado. Con la matriz inversa se realiza el proceso contrario, es decir, hallar las coordenadas en el sistema rotado a partir de las coordenadas iniciales.

Veamos nuestro caso particular:

Si los ejes coordenados X y Y se rotan 45^0 respecto al origen, al punto P de coordenadas (1, 2) en XY le corresponden las coordenadas $\left(3/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$ en el sistema X'Y' porque:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^0 & sen45^0 \\ -sen45^0 & \cos 45^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

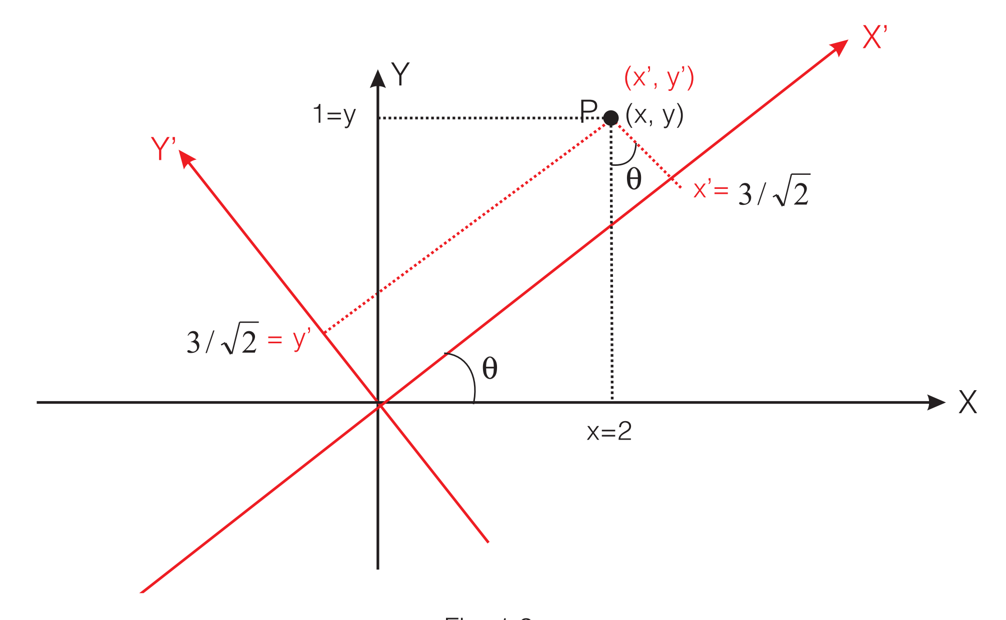


Fig. 1.2

De la matriz de rotación R_θ, se puede deducir el ángulo de rotación θ con cualquiera de las funciones arcoseno ó arcocoseno. Si $R_\theta = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$, entonces θ = 30^0, porque arcsen(1/2) = 30^0 o arcos($\sqrt{3}/2$) = 30^0.

Ejercicios propuestos:

1. Halle si existe la matriz inversa de:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & -8 & 11 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ calcular $(AB)^{-1}$.

3. Encuentre la matriz H tal que: $-3H^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ -3 & -12 & 0 \\ 0 & -15 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Si A y B son matrices cuadradas y A es invertible, verifique que:

$(A + B)A^{-1}(A - B) = (A - B)A^{-1}(A + B)$

5. Si $\theta = \frac{\pi}{3} rad$ encuentre la matriz inversa de R_θ.

6. Si $R_\theta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ encuentre el ángulo de rotación .

7. Las coordenadas de un punto P en un sistema X'Y' que se obtiene de rotar los ejes coordenados X y Y un ángulo de 30^0 son (6, -2). Encuentre las coordenadas iniciales de P.

8. Si el punto P tiene coordenadas (-4, 7) en el sistema XY, encuentre las coordenadas de P respecto al sistemas X'Y' que se forma por una rotación de $\frac{\pi}{6} rad$ respecto al origen.

9. Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ hallar la matriz X tal que $A^T X = A$.

RESUMEN

Una **matriz** es un conjunto de elementos dispuestos en forma rectangular y se denota: $A_{mxn} = (a_{ij})$, donde A es el nombre de la matriz, mxn es su orden y el subíndice ij indica la posición en fila y columna respectivamente de cada elemento.

Las matrices sirven para recoger mucha información en forma organizada y fácil de analizar e interpretar. Un caso particular corresponde a la solución de sistemas de ecuaciones lineales por métodos matriciales, para los cuales se hace uso de las formas escalonada y reducida de una matriz.

Una **matriz escalonada por filas** es una matriz de cualquier orden mxn, en la cual: el pivote de cada fila es 1; los elementos por debajo de los pivotes son cero; el pivote de cada fila se encuentra a la derecha del pivote de la fila anterior, y las filas nulas (si las hay) son las últimas (abajo).

Una **matriz reducida por filas** es una matriz escalonada en la que el único elemento no nulo de una columna con pivote, es el pivote.

Toda matriz de cualquier orden **es equivalente, por filas, a una matriz escalonada y/o a una matriz reducida por filas.**

Con matrices se pueden efectuar las siguientes operaciones:

- **Suma de matrices:** se efectúa término a término entre matrices del mismo orden, $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. El resultado es una matriz del mismo orden de A y B.

El orden en que se suman las matrices no afecta el resultado (conmutatividad).

Al sumar más de 2 matrices, el orden en que se agrupan las matrices no afecta el resultado (asociatividad).

La **matriz nula** es módulo porque cualquier matriz sumada con ella queda igual.
Para toda matriz existe una **matriz opuesta** del mismo orden, llamada así porque la suma de las dos es la matriz nula.

- **Multiplicación escalar:** se efectúa entre un real (escalar) y una matriz, multiplicando cada elemento de la matriz por el escalar, $rA = (ra_{ij})$. El resultado es una matriz del mismo orden de A y se llama **múltiplo escalar de A.**

- **Producto de matrices:** solo se puede efectuar entre matrices cuadradas del mismo orden, o entre 2 matrices, para las cuales, el número de columnas en la primera matriz debe ser igual al número de filas en la segunda matriz, $A_n.B_n = C_n$ o $A_{mxn}.B_{nxp} = C_{mxp}$.

En el primer caso, el resultado es una matriz cuadrada del mismo orden, en el segundo caso, es una matriz con tantas filas como la primera matriz y tantas columnas como la segunda matriz.

El producto de matrices es **asociativo**, porque se pueden multiplicar mas de 2 matrices, sin que la forma de agruparlas para efectuar el producto afecte el resultado ((A.B).C = A.(B.C) = A.B.C).

El producto **no es conmutativo**, quiere decir que al efectuar el producto, si se cambia el orden de la matrices, el resultado puede ser diferente ($A.B \neq B.A$).
En el producto de matrices cuadradas, la **matriz idéntica** del orden que corresponda es el módulo, porque cualquier matriz multiplicada por ella a derecha o a izquierda no cambia (A.I = A = I.A).

La **matriz inversa** de una matriz A es otra matriz B, que al ser multiplicada por A, a derecha o a izquierda, da como resultado la matriz idéntica del mismo orden. Se denota como $B = A^{-1}$, entonces $A.A^{-1} = I_n = A^{-1}.A$. En tal caso, se dice que A es **matriz invertible** o no-singular. La matriz inversa no siempre existe, es **necesario** que la **matriz** sea **cuadrada** y que su **determinante** sea **diferente de cero.**

Para hallar la matriz inversa de cualquier matriz cuadrada, sin tener certeza de si existe o no, se desarrolla un **algoritmo** que consisten en llevar la **matriz aumentada** (A : I) a la forma reducida por filas. Con este proceso se obtiene la matriz inversa o se puede concluir que no existe. Si la matriz inversa de A existe, la forma reducida de (A : I) es $(I : A^{-1})$.

GLOSARIO

Una **matriz** es un conjunto de elementos dispuestos en forma rectangular (A_{mxn}).

El **orden** de una matriz lo determina el número de filas y de columnas en la matriz.

Una **fila**, es el conjunto de elementos dispuestos en forma horizontal (F_i).

Una **columna** es el conjunto de elementos dispuestos en forma vertical (C_j).

Una **matriz cuadrada** tiene igual cantidad de filas que de columnas (A_n).

La **diagonal principal** de una matriz cuadrada la forman los elementos que se encuentran en la misma fila y la misma columna (a_{ii})

La **matriz idéntica** es una matriz cuadrada de cualquier orden, con unos en la diagonal principal y ceros en las demás posiciones (I_n). Es el módulo del producto de matrices.

La **matriz nula** es una matriz de cualquier orden con todos los elementos iguales a cero (O_{mxn}). Es el módulo de la suma de matrices.

La **matriz opuesta** de A es otra matriz (-A) del mismo orden, que se forma con los opuestos de los elementos de A ($-A = (-a_{ij})$).

Matrices iguales son las que tienen los mismos elementos en las mismas posiciones ($a_{ij} = b_{ij}$).

Una **operación elemental** es una modificación en los elementos de una matriz.

Las **Matrices equivalentes** son las que se obtienen por medio de operaciones elementales sobre las filas o las columnas de una matriz ($A \approx B$).

Un **pivote** es el primer elemento no nulo de cada fila, no nulo de una matriz.

En una **matriz escalonada** el pivote de cada fila es 1 y se desplazan hacia abajo y a la derecha. Los elementos por debajo de los pivotes son cero y las filas nulas son las últimas (abajo).

Una **matriz reducida por filas** es una matriz escalonada, en la que el único elemento no nulo de una columna con pivote, es el pivote.

Un **algoritmo** es una secuencia de instrucciones para el desarrollo de un proceso.

Una **matriz idempotente** es aquella que al ser multiplicada por ella misma, da como resultado la misma matriz ($A^2 = A.A = A$).

La **Matriz inversa** de A_n es otra matriz $A^{-1,}$ que al ser multiplicada por A, a derecha o a izquierda, da como resultado la matriz idéntica del mismo orden ($A.A^{-1} = I_n = A^{-1}.A$).

La Matriz invertible o no-singular es aquella para la cual existe la inversa.

La Matriz singular es aquella para la cual no existe la inversa.

La Matriz aumentada es aquella que se forma agregando a la derecha de una matriz las columnas de otra matriz (A : B).

AUTOEVALUACIÓN

En cada caso seleccione la respuesta correcta.

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?:

a) A es triangular inferior
b) $a_{12} = a_{21}$ pero $a_{23} \neq a_{32}$
c) A es matriz simétrica
d) A es una matriz de orden 3

2. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ el resultado de A + B es:

a) $\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 7 & 9 & 0 \\ 9 & 10 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** No existe.

3. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la segunda fila de la matriz B para la cual

$3A - B = 2C$ es:

a) (0 -2 9) **b)** (3 -2 -6) **c)** (0 2 -9) **d)** (-3 2 6)

4. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces A^2 es igual a:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 9 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. La matriz inversa de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

6. Si A y B son matrices cuadradas, la única afirmación verdadera es:

a) $(A + B)^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$
b) Se pueden efectuar los dos productos AB y BA.
c) $(AB)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$
d) A y B son matrices singulares

7. La forma escalonada de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** Ninguna de las anteriores

Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera (V) o falsa (F):

8. Toda matriz cuadrada tiene inversa.

9. La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ es singular porque su determinante es igual a cero.

10. Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden, $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

11. Si $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $m_{23} = m_{21} - m_{22}$

12. Una matriz fila y una matriz columna siempre se pueden multiplicar.

13. Toda matriz reducida es una matriz escalonada.

14. Las matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son equivalentes porque B se obtuvo sumando 3 a cada elemento de la fila 1 de la matriz A.

15. Toda matriz de orden 2 se puede escribir de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

RETROALIMENTACIÓN

Respuestas a los ejercicios propuestos.

Sección 1.1 (página 13): **1.** $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 & 7 \\ 22 & 14 & 18 & 12 \end{pmatrix}$ matriz tamaño-mezcla.

2a) 7 **2b)** 3 **2c)** en febrero **2d)** azules de lujo **2e)** en febrero **2f)** en febrero **2g)** 35

3a)

3b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. $x = 6, \quad y = \frac{2}{3}, \quad z = \frac{7}{2}$

5a) A y C **5b)** A, B, C y D **5c)** C **5d)** C y H **5e)** C, E y R

6a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **6b)** $\begin{pmatrix} 8 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 10 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 11 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

7a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **7b)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **7c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. Al intercambiar filas por columnas los elementos de la diagonal principal quedan fijos, y el único elemento que es igual a su opuesto es cero.

Sección 1.2 (página 28): **1.** a= 5, b= 0, c= 1 y d= 1

2. $\begin{pmatrix} 7/3 & 1 & 6 \\ -2/3 & 2 & 11/3 \\ 5 & 17/3 & 13/3 \end{pmatrix}$ **3.** $B = \begin{pmatrix} 31/2 & -14 & 3/2 \\ -14 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}$

4. $X^2 - 5X + 4I = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$

5. $AX = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 19 \\ 5 & 5 & 10 \\ 18 & 16 & 26 \end{pmatrix} = BX$ **6.** $4x^2 - 2xy + 4xz + 2yz$

7. $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5I_3$

8. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = A$

9. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & -1/2 & 7/2 \\ 1/2 & 4 & 1 & 5/2 \\ -1/2 & 1 & -4 & -1/2 \\ 7/2 & 5/2 & -1/2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 0 & -3/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$

10. $X = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Sección 1.3 (página 38): **1a)** No existe **1b)** $\begin{pmatrix} -19 & 3 & 11 \\ 3 & -1/2 & -3/2 \\ 4 & -1/2 & -5/2 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 5/48 & -7/96 \\ 7/24 & -5/48 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 4/7 & 15/7 & -12/7 \\ -1/7 & -2/7 & 3/7 \\ -5/7 & -10/7 & 8/7 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

6. $\theta=\pi = 180^0$ **7.** $\left(3\sqrt{3}+1,\ 3-\sqrt{3}\right)$ **8.** $\left(-2\sqrt{3}+\frac{7}{2},\ 2+\frac{7}{2}\sqrt{3}\right)$

Solución Autoevaluación Unidad 1: (página 43)

1. La respuesta correcta es **c).** La fila 2 de la matriz es diferente de la columna 2 de la matriz, y una condición para que una matriz sea simétrica es que cada fila sea igual a la correspondiente columna.

2. La respuesta correcta es **d).** La suma de matrices está definida sólo para matrices del mismo orden, porque se suman entre sí los elementos en la misma ubicación.

3. La respuesta correcta es **a).** Si 3A – B = 2C entonces B = 3A – 2C, por tanto

$$B = 3\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 9 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$,luego la fila 2 de B es (0 -2 9).

4. La respuesta correcta es **d).** $A^2 = A\,A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. La respuesta correcta es **b).** Si se efectúa el producto entre una matriz y su inversa, el resultado es la matriz idéntica. En este caso:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. La respuesta correcta es **b).** Uno de los casos para los cuales está definido el producto de matrices, es para matrices cuadradas del mismo orden, pero no toda matriz cuadrada es invertible por lo que no se puede hacer ninguna de las otras afirmaciones.

7. La respuesta correcta es **a).** Efectuando operaciones elementales sobre la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}F_2]{\frac{1}{3}F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

, se tiene la forma escalonada porque los pivotes son 1, los elementos por debajo de ellos son cero y se desplazan a la derecha.

8. La afirmación es **falsa**. Un contraejemplo es la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, esta matriz es cuadrada pero det(A) = 2.0 – 0.1 = 0, por tanto la matriz inversa de A no existe.

9. La afirmación es **verdadera.** Si el determinante de una matriz es cero no existe la matriz inversa, es decir, la matriz es no-invertible o singular.

10. La afirmación es **falsa.** Aplicando la propiedad distributiva del producto de matrices se tiene:
$(A + B)(A - B) = AA - AB + BA - BB = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$
el producto de matrices no es conmutativo razón por la que – AB y BA no se anulan.

11. La afirmación es **falsa.** La matriz M tiene sólo 2 columnas, por tanto, el elemento m_{23} que corresponde a la segunda fila y la tercera columna no existe.

12. La afirmación es **verdadera.** Una matriz fila F es de orden 1xn y una matriz columna C es de orden mx1, por tanto se puede efectuar el producto CF y el resultado es una matriz de orden mxn.

13. La afirmación es **verdadera.** Una condición para que una matriz sea reducida (por filas o columnas), es que sea escalonada (por filas o columnas respectivamente).

14. La afirmación es **falsa.** Dos matrices son equivalentes si una se obtiene a partir de la otra por medio de una o más operaciones elementales, pero sumar una constante a los elementos de una fila no es una operación elemental.

15. La afirmación es **verdadera.** Si se efectúan las operaciones de suma y multiplicación escalar indicadas del lado derecho, el resultado es la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, independientemente de los valores para las constantes *a, b, c, y d.*

2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

"El planteo de ecuaciones es como la traducción de un leguaje a otro".

Newton.

INTRODUCCIÓN

Los sistemas de ecuaciones son una herramienta de gran utilidad en el planteamiento y solución de problemas de aplicación en diferentes áreas del conocimiento: en economía existe un conocido modelo matemático llamado Modelo de Leontief, que relaciona oferta y demanda entre diversos sectores de una economía en cierto período de tiempo; en química para el balanceo de ecuaciones; en ciencias de la salud para la descripción de dosis de medicamentos; en ingeniería existen diferentes modelos de aplicación para la descripción de fenómenos físicos, para calcular costos, o para el ajuste de curvas a una serie de datos tomados en un experimento.

Los sistemas de ecuaciones lineales tienen representación geométrica para los casos de ecuaciones con 2 y 3 variables. La representación geométrica de una ecuación lineal con 1 o 2 variables en el plano, es una recta y de ecuaciones con 1, 2 o 3 variables en el espacio, es un plano; las ecuaciones lineales con mas de 3 variables no tienen representación geométrica pero si tienen interpretación analítica.

Con o sin interpretación geométrica, los sistemas de ecuaciones se utilizan para diseñar modelos matemáticos que permiten resolver problemas reales en áreas como la ingeniería o la economía, independientemente de si el problema tiene solución única, infinitas soluciones, o es inconsistente.

Aunque existen diferentes métodos de solución para los sistemas de ecuaciones, en esta unidad se estudiaran solo 3 de ellos: Eliminación de Gauss, Reducción de Gauss-Jordan y la matriz inversa para la solución de la ecuación matricial.

OBJETIVO GENERAL

Estudiar para los sistemas de ecuaciones lineales: tipos de solución con sus correspondientes interpretaciones, métodos matriciales de solución y aplicaciones a la ingeniería.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Interpretar y generalizar los tipos de solución para un sistema de m ecuaciones lineales con n variables.
- Aplicar diferentes métodos matriciales para resolver un sistema de ecuaciones lineales
- Utilizar los sistemas de ecuaciones lineales en el planteamiento y solución de problemas aplicados a la ingeniería.

CONTENIDO

2.1. Generalidades
2.1.1. Sistemas de ecuaciones lineales (S.E.L.).
2.1.2. Sistemas lineales homogéneos (S.L.H.).

2.2. Métodos de solución.
2.2.1. Eliminación de Gauss.
2.2.2. Reducción de Gauss-Jordan.
2.2.3. Solución de la ecuación matricial.

2.3. Aplicaciones.
2.3.1. Problemas con solución única.
2.3.2. Problemas con más de una solución.

2.1. GENERALIDADES

Definición: Se llama ECUACIÓN LINEAL con n variables a una ecuación de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b \quad ,$$

donde: $x_1, x_2, \ldots x_n$ son las VARIABLES, todas de grado 1
$a_1, a_2, \ldots a_n$ son constantes reales llamadas COEFICIENTES de las variables y b se llama TÉRMINO INDEPENDIENTE porque no es un coeficiente.

Cada sumando de la ecuación es de grado 1 y ningún término es producto de dos o más variables.

Ejemplos:

1. La ecuación $3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 7$ es una ecuación lineal con 4 variables x_1, x_2, x_3 y x_4 ; los coeficientes son: $a_1 = 3$, $a_2 = -5$, $a_3 = 1$, $a_4 = -1$ y $b = 7$ es el término independiente.

2. La ecuación $3x + 4y - 2z = 0$ es una ecuación lineal donde las variables son: x, y y z ; los coeficientes son: 3, 4 y –2 y el término independiente es 0.

3. La ecuación $a + b + c = d$ es una ecuación lineal en la cual a, b, c y d son las variables; 1, 1, 1 y –1 los respectivos coeficientes y 0 es el término independiente. ($a + b + c - d = 0$).

4. La ecuación $3x - 5y^2 + 2z = -4$ no es lineal porque la variable y es de grado 2.

5. La ecuación $xy + 5z^{-1} + y = 3y$ no es lineal porque el término xy es de grado 2 y la variable z no es de grado 1 (tiene exponente –1).

Definición: Se llama SOLUCIÓN de una ecuación lineal con n variables a un conjunto de n valores reales $c_1, c_2, \ldots c_n$ tales que, al ser sustituidos por $x_1, x_2, \ldots$ y x_n respectivamente, satisfacen la igualdad.

RESOLVER una ecuación lineal es hallar la(s) solución(es).

Ejemplos:

1. El conjunto $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, $c_3 = -1$ y $c_4 = 4$ es una solución de la ecuación $a + b + c - d = 0$ porque si $a = 2$, $b = 3$, $c = -1$ y $d = 4$ la igualdad se cumple: $2 + 3 - 1 - 4 = 5 - 5 = 0$.

Otra solución de esta ecuación es: $a = -3$, $b = -5$, $c = 6$ y $d = -2$ (verifíquelo).

2. La ecuación $3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 7$ tiene muchas soluciones, algunas de ellas son:

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 9$, $x_4 = -3$; $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 7$, $x_4 = 0$.

$x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $x_3 = 14$, $x_4 = 7$; $x_1 = 7$, $x_2 = 4$, $x_3 = 9$, $x_4 = 3$.

Casos particulares de ecuaciones lineales son las ecuaciones con 2 o 3 variables, que geométricamente representan una recta en el plano ($\Re^2$) ó un plano en el espacio ($\Re^2$), respectivamente.

Interpretación geométrica:

(1) La ecuación lineal con 2 variables: $ax + by = c$.

Es una recta en el plano (R^2), que se puede graficar si se conocen dos puntos, es decir dos soluciones de la ecuación. Como una recta tiene infinitos puntos, la ecuación tiene infinitas soluciones porque cada punto corresponde a una solución.

Ejemplo: Graficar la ecuación $4x + 2y = 6$.

Solución:

Dos soluciones de esta ecuación son: $x = 0$; $y = 3$ y $x = 3/2$; $y = 0$ por tanto dos puntos de la recta son: (0, 3) y (3/2, 0) con los cuales se puede graficar la recta en el plano cartesiano (figura 2.1):

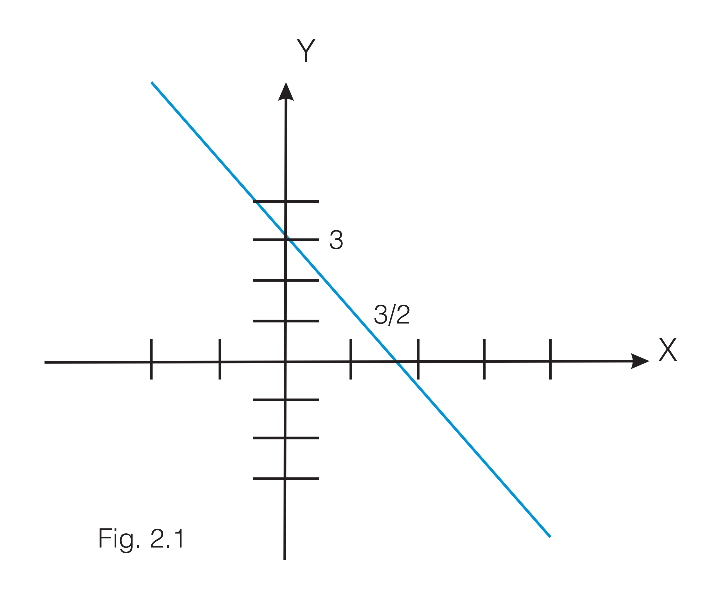


Fig. 2.1

(2) La ecuación lineal con 3 variables: $ax + by + cz = d$.

Es un plano en el espacio ($\Re^3$) que se puede graficar si se conocen tres puntos, es decir, tres soluciones de la ecuación. Como un plano tiene infinitos puntos, la ecuación tiene infinitas soluciones porque cada punto corresponde a una solución.

Ejemplo: Graficar la ecuación $15x + 5y + 6z = 15$.

Solución:
Tres soluciones de esta ecuación son: $x = 0$, $y = 0$, $z = 5/2$; $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ y $x = 0$, $y = 3$, $z = 0$; por tanto tres puntos del plano son: (0, 0, 5/2) ; (1, 0, 0) y (0, 3, 0) con los cuales se puede graficar el plano. (figura 2.2):

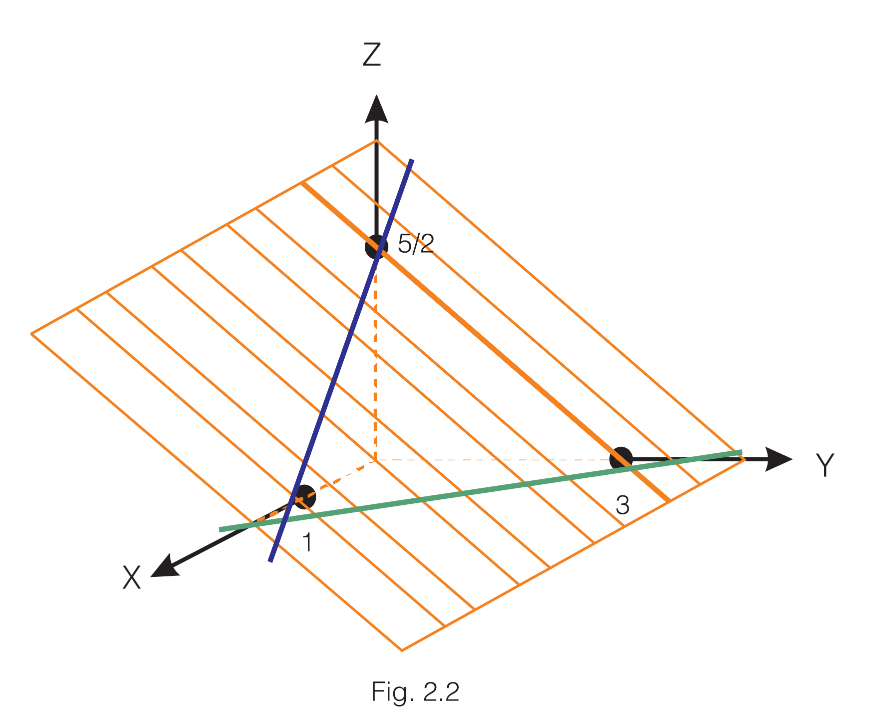


Fig. 2.2

También representan planos en el espacio ($\Re^3$) las ecuaciones:

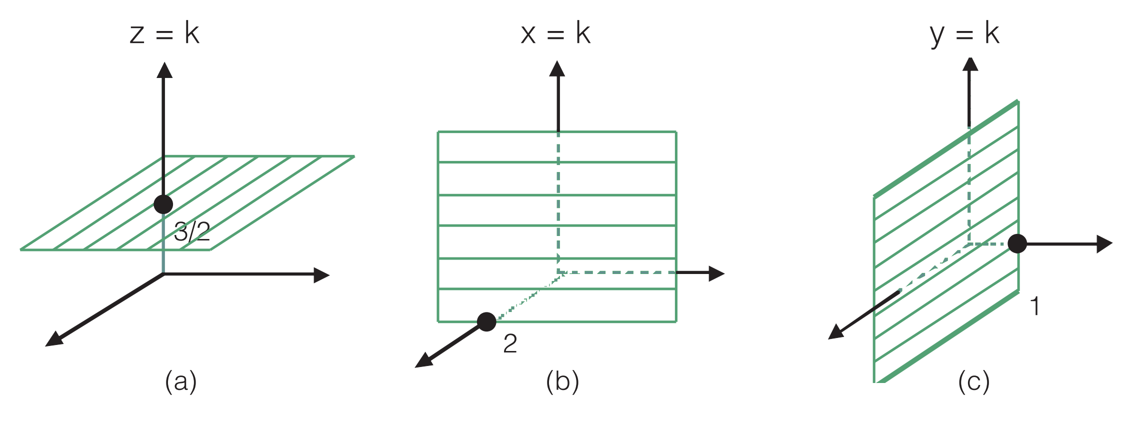


Fig. 2.3

Las figuras 2.3. (a), (b) y (c), ilustran las gráficas de los planos que corresponden a las ecuaciones:

$z = 3/2$; $x = 2$ y $y = 1$ respectivamente.

Las ecuaciones lineales con 2 variables: x, y o x, z o y, z representan planos ortogonales a los planos coordenados XY, XZ y YZ respectivamente. (Grafíquelos)

2.1.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Definición: Se llama SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES (S. E. L.) de orden mxn a un conjunto de m ecuaciones lineales con n variables.

Se denota
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Definición: Se llama SOLUCIÓN de un sistema de m ecuaciones lineales con n variables, a un conjunto de n valores reales $c_1, c_2, \ldots c_n$ tales que al ser sustituidos por $x_1, x_2, \ldots$ y x_n respectivamente, satisfacen la m igualdades del sistema.

Ejemplos:

1. $\begin{cases} 5x - 3y = -1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ es un sistema de orden 2 porque tiene 2 ecuaciones y 2 variables.

Este sistema de ecuaciones tiene solución: $x = 1$; $y = 2$ porque:

Remplazando en la primera ecuación se tiene $5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 5 - 6 = -1$

Remplazando en la segunda ecuación se tiene $1 + 2 \cdot 2 = 1 + 4 = 5$

2. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2y+z=2 \\ y+2z=2 \end{cases}$ es un sistema de orden 3 porque tiene 3 ecuaciones y 3 variables.

Este sistema tiene como solución: : $x = \frac{5}{3}$; $y = \frac{2}{3}$ y $z = \frac{2}{3}$ porque:

Remplazando en la primera ecuación: $\frac{5}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{9}{3} = 3$

Remplazando en la segunda ecuación: $2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$

Remplazando en la tercera ecuación: $\frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$

3. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8 \\ -2x_2+2x_3=2 \end{cases}$ es un sistema de orden 2x3, hay 2 ecuaciones y 3 variables.

Este sistema tiene mas de una solución, 2 de ellas son:

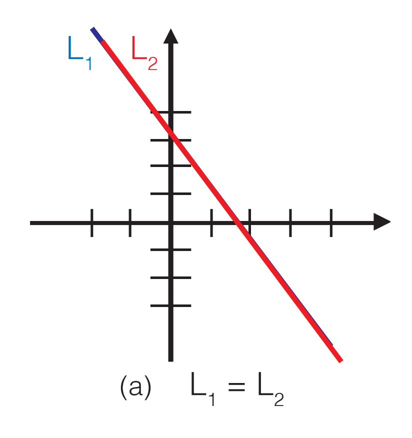
$x_1 = 10$; $x_2 = -1$; $x_3 = 0$ y $x_1 = 4$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$ (verifíquelo)

RESOLVER un sistema de ecuaciones lineales es hallar el conjunto de soluciones que satisfacen todas las ecuaciones del sistema.

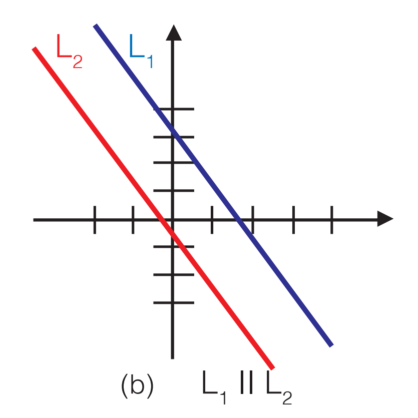
Para un sistema de ecuaciones lineales hay tres posibilidades de solución:

El sistema tiene solución única.
(2) Existen infinitas soluciones.
(3) El sistema es inconsistente, es decir no tiene solución.

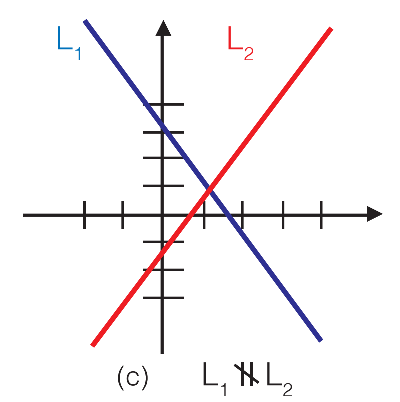
Interpretación geométrica:



(a) $L_1 = L_2$



(b) $L_1 \parallel L_2$



(c) $L_1 \nparallel L_2$

Fig. 2.4

(1) Para un sistema de ecuaciones con 2 variables:

Una ecuación lineal con **2 variables** representa **una recta** en el plano, por tanto dos ecuaciones representan dos rectas, las cuales pueden ser iguales o diferentes, y siendo diferentes pueden ser paralelas o no paralelas (secantes).

Si son iguales, tienen todos los puntos (infinitos) en común, entonces el sistema tiene **infinitas soluciones** (figura 2.4 (a)).

Si son diferentes y paralelas no tienen puntos en común, entonces el sistema no tiene solución, es **inconsistente** (figura 2.4 (b)).

Si las rectas son secantes solo tienen un punto en común, entonces el sistema tiene solución única. Las coordenadas del punto de intersección son la solución del sistema de ecuaciones (figura 2.4.(c)).

CONCLUSIÓN: La solución de un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas, geométricamente es el conjunto de puntos de intersección de las rectas: uno, todos o ninguno.

Si el sistema tiene 3 o mas rectas, es decir, si hay mas de 2 ecuaciones para que la solución sea única, todas las rectas se deben intersectar en el mismo punto (figura 2.5(c)).

Si hay mas de 2 rectas, todas deben coincidir para que el sistema tenga infinitas soluciones (figura 2.5(a)).

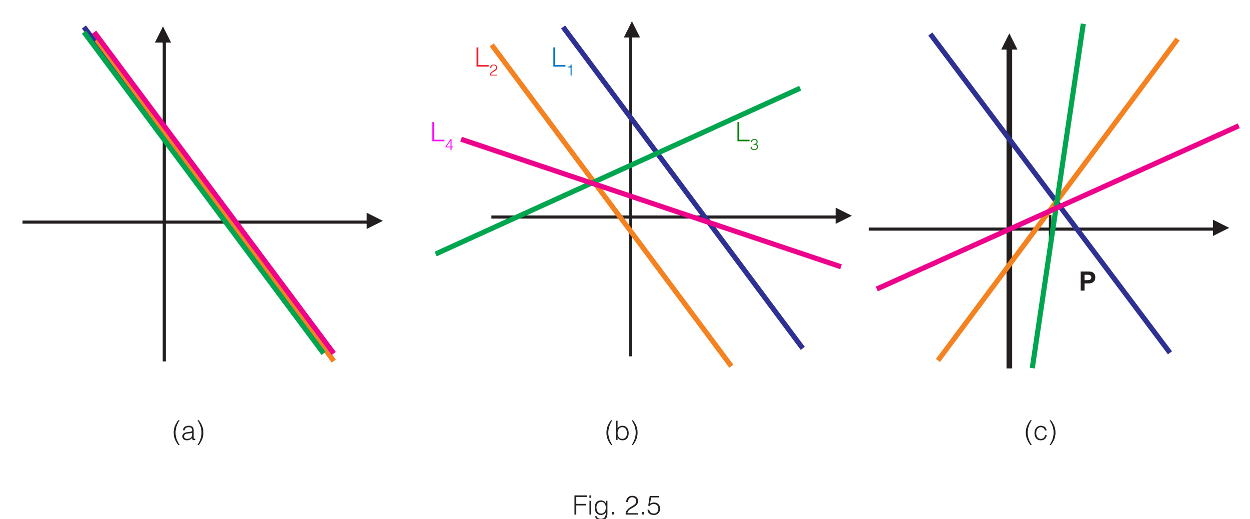


Fig. 2.5

En un conjunto de 3 o mas rectas, es suficiente que una de ellas no se intersecte con las demás en el mismo punto para que el sistema de ecuaciones sea inconsistente (figura 2.5(b)).

En la figura (a): $L_1 = L_2 = L_3 = L_4$ las rectas son iguales.
En la figura (c): $L_1 \cap L_2 \cap L_3 \cap L_4 = \{ P \}$ las rectas se intersectan en un solo punto P.
En la figura (b): las rectas no se intersectan en el mismo punto.

(2) Para un sistema de ecuaciones con 3 variables:

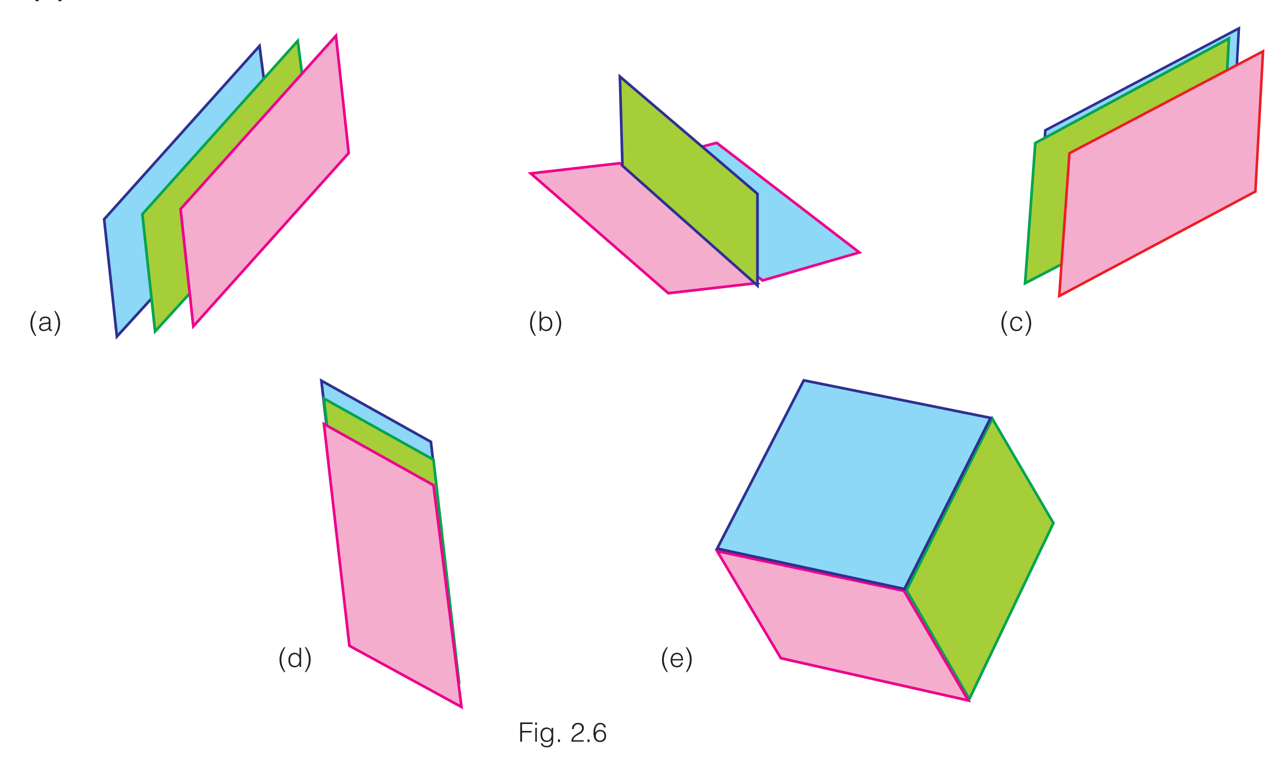


Fig. 2.6

Si la ecuación tiene **3 variables** representa **un plano**, por tanto, un sistema de ecuaciones lineales con 3 variables, geométricamente representa un conjunto de planos que pueden ser iguales o diferentes, paralelos, o secantes, y en este último caso, la intersección puede ser un punto o una recta.

Si dos de los planos son paralelos y diferentes, el correspondiente sistema de ecuaciones es **inconsistente** (figuras 2.6 (a) y (c)).

Si la intersección de los tres planos es solo un punto (como la esquina de confluencia de tres paredes en una habitación), el sistema de ecuaciones tiene **solución única** (figura 2.6 (e)).

El sistema tiene **infinitas soluciones** en los siguientes casos: cuando todos los planos coinciden (figura 2.6 (d)), o cuando la intersección entre ellos es una recta como la confluencia de 2 paredes en una habitación o las hojas de un libro abierto (figura 2.6 (b)).

Todo sistema de ecuaciones lineales de orden mxn se puede definir por medio de una **ecuación matricial** de la forma: **A X = B**, donde:

A_{mxn} es la matriz que se forma con los coeficientes.
X_{nx1} es la matriz que se forma con las variables .
B_{mx1} es la matriz que se forma con los términos independientes.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}}$$

Teorema 1: Un sistema de ecuaciones lineales (S.E.L.) de orden n tiene solución única si y sólo si la forma reducida de la matriz de coeficientes, es la matriz idéntica I_n de orden n.

Teorema 2: Si un sistema de ecuaciones lineales (S.E.L.) tiene menos ecuaciones que variables, entonces, o el sistema tiene infinitas soluciones, o no tiene solución (es inconsistente).

Ejemplos:

1. Hallar todos los pares de números (x, y) que satisfacen las ecuaciones: $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

Solución: Utilizaremos el método de eliminación.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \xrightarrow{(1)} \begin{cases} x + y = 1 \\ \quad y = 5 \end{cases} \xrightarrow{(2)} \begin{cases} x = -4 \\ y = 5 \end{cases}$$

(1) Multiplicamos la primera ecuación por (–2) y se la sumamos a la segunda.
(2) Multiplicamos la segunda ecuación por (-1) y sumamos el resultado a la primera.

Se observa que se tiene solo **una solución**: $(x, y) = (-4, 5)$.

2. Hallar todos los pares de números (x, y) que satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases}$$

Solución: Multiplicamos la primera ecuación por (–2) y se la sumamos a la segunda:

$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases} \Rightarrow \quad x - 2y = -2$$

Se puede verificar que las 2 ecuaciones representan la misma recta, entonces el sistema es equivalente a la primera ecuación y esto implica que tiene **infinitas soluciones** (teorema 2).

3. Hallar todos los pares de números (x, y) que satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Solución: Multiplicamos la primera ecuación por (–1), y se la sumamos a la segunda:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 = 1 \text{ lo cual es una inconsistencia.}$$

En este caso se puede verificar gráficamente que las 2 rectas son paralelas. Se concluye entonces que el sistema de ecuaciones es **inconsistente.**

2.1.2. Sistemas lineales homogéneos

Definición: Un sistema de ecuaciones lineales se llama SISTEMA LINEAL HOMOGENEO (S.L.H.), si en todas las ecuaciones el término independiente es cero.

Se denota: $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad A_{mxn} X_{nx1} = O_{mx1}$$

Ejemplos:

Los sistemas de ecuaciones $\begin{cases} x \quad + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ 4x + y \quad = 0 \end{cases}$ y $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 13x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

son sistemas lineales homogéneos porque en cada uno de ellos todos los términos independientes son cero.

Un S.L.H. se caracteriza porque **siempre tiene solución.** Si todas las variables toman el valor de cero, se satisfacen todas las ecuaciones, entonces:

$x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; . . . ; $x_n = 0$ es una solución del sistema de ecuaciones y se llama **solución trivial.**

Si el sistema es de **solución única**, esta solución es la **trivial.**

Sin embargo pueden existir otros valores de las variables, no todos iguales a cero, que satisfagan todas las ecuaciones, en tal caso el sistema tiene **infinitas soluciones.**

CONCLUSIÓN: Un sistema lineal homogéneo (S.L.H.) siempre es consistente (tiene solución) y existen dos posibilidades: solo tiene la solución trivial o tiene infinitas soluciones. Pero en el caso de infinitas soluciones, está incluida la solución trivial.

Teorema 3: Todo sistema lineal homogéneo (S.L.H.) con menos ecuaciones que variables tiene infinitas soluciones.

Demostración:
Si el sistema tiene menos ecuaciones que variables, por el teorema 2, tiene infinitas soluciones o no tiene solución; pero como un sistema homogéneo siempre tiene al menos la solución trivial. Se concluye que el sistema tiene infinitas soluciones.

Ejemplos:

1. Hallar todas las ternas (x, y, z) que satisfacen las ecuaciones $\begin{cases} x \quad + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ 4x + y \quad = 0 \end{cases}$

Solución: Utilizamos el método de eliminación.

$$\begin{cases} x \quad + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ 4x + y \quad = 0 \end{cases} \xrightarrow{(1)} \begin{cases} -2x + y = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases} \xrightarrow{(2)} 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

(1) Multiplicamos la primera ecuación por (–1) y se la sumamos a la segunda.
(2) Multiplicamos la primera ecuación por (-1) y sumamos el resultado a la segunda.

Remplazando $x = 0$ en la primera ecuación se tiene $z = 0$, y remplazando en la tercera ecuación se tiene $y = 0$. Concluimos entonces que existe sólo una solución, la trivial:

$(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

2. Hallar todas las ternas (x_1, x_2, x_3) que satisfacen las ecuaciones $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 13x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

Solución: Sumamos la primera ecuación a la segunda:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 13x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 18x_1 + 6x_2 = 0 \Rightarrow 3x_1 + x_2 = 0$$

Por el teorema 3 se concluye que hay **infinitas soluciones.**

Ejercicios propuestos:

1. Decida si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera (V) o falsa (F) Justifique su respuesta:

a) La solución de un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 variables, es un par ordenado que satisface ambas ecuaciones.
b) Es posible tener un sistema lineal homogéneo con exactamente 3 soluciones.
c) Un sistema de ecuaciones lineales consistente, tiene mas de una solución.
d) Un sistema lineal homogéneo con mas variables que ecuaciones, tiene infinitas soluciones.

2. Si $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$ es una solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -8 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$

Decida si el sistema tiene o no infinitas soluciones. ¿Por qué?

3. Escriba ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales con las características dadas en cada caso:

a) No homogéneo de orden 3x4.
b) Homogéneo con infinitas soluciones.
c) De orden 2x3 que sea inconsistente
d) Que represente un conjunto de 3 planos que se intersectan en un solo punto.

4. Las siguientes matrices corresponden a la forma reducida de algunos sistemas lineales homogéneos:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Decida en cada caso si el sistema tiene solución única o infinitas soluciones. Justifique sus respuestas.

5. Escriba para cada uno de las siguientes ecuaciones matriciales el sistema de ecuaciones correspondientes:

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

2.2. MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Existen varios métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales:

1. Método de eliminación de Gauss.
2. Método de reducción de Gauss-Jordan.
3. Solución de la ecuación matricial con la matriz inversa.
4. Regla de Cramer.
5. Métodos de aproximación numérica.

En esta sección solo trabajaremos los tres primeros métodos, los cuales se desarrollan con el uso de matrices. El método llamado regla de Cramer se estudia en la unidad 3 como aplicación de los determinantes. Los métodos de aproximación numérica son tema de otra asignatura llamada Métodos Numéricos.

Los dos primeros métodos hacen referencia a la matriz aumentada del S. E. L.

Definición: Se llama MATRIZ AUMENTADA de un S.E.L. a la matriz que se forma con los coeficientes de las variables, aumentando al lado derecho, la columna de los términos independientes de las ecuaciones. Se denota [A : B] donde A es la matriz de coeficientes y B es la columna aumentada.

Ejemplo:

Para el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x-2y-3z=-1 \\ 3x+5y+2z=8 \\ x+y+z=4 \\ 2x+7y+5z=9 \end{cases}$

la matriz aumentada es: [A : B] = $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 5 & 9 \end{array}\right)$

donde la matriz del lado izquierdo es la matriz de coeficientes y la columna del lado derecho se formó con los términos independientes de las ecuaciones.

2.2.1. Eliminación de Gauss

Es la forma simplificada y generalizada del método de eliminación descrito en la sección anterior, mediante el uso de las matrices. Consiste en "triangulizar" la matriz aumentada del S. E. L.

Algoritmo:

(1) Escribir la matriz aumentada [A : B] del sistema de ecuaciones.
(2) Llevar la matriz [A : B] a la forma escalonada por filas [C : D].
(3) Escribir el sistema de ecuaciones asociado a la matriz escalonada [C : D].
(4) Hallar el valor de cada una de las variables por sustituciones sucesivas a partir de la última ecuación.
(5) Escribir la solución del sistema de ecuaciones.

En el paso (2) debe analizarse la forma de la matriz escalonada, para identificar el tipo de solución :

- Si C es matriz triangular superior con unos en la diagonal principal, el sistema tiene solución única y se continua con los pasos (3), (4) y (5)

- Si en la matriz aparece una fila de ceros excepto en la última columna, el sistema es inconsistente.

- Si la matriz no presenta inconsistencia pero tampoco corresponde a solución única, el sistema tiene infinitas soluciones y se caracteriza porque tiene menos ecuaciones que variables.

Nota: Todo S.E.L. se puede representar por medio de una matriz y recíprocamente a toda a matriz se puede asociar un S. E. L.

Ejemplos:

1. Utilizando el método de Eliminación de Gauss, hallar la solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x-2y-3z=-1 \\ 3x+5y+2z=8 \\ x+y+z=4 \\ 2x+7y+5z=9 \end{cases}$$

Solución: Se aplica el algoritmo

1. Matriz aumentada del sistema de ecuaciones: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 5 & 9 \end{array}\right)$

2. Se lleva la matriz a la forma escalonada por filas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 5 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 11 & 11 & 11 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 11 & 11 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = [C : D]$$

(1): La fila 1 multiplicada por (-3) se le sumó a la fila 2
multiplicada por (-1) se le sumó a la fila 3
multiplicada por (-2) se le sumó a la fila 4

(2): La fila 2 multiplicada por (-1) se le sumó a la fila 4.
La fila 2 se multiplicó por (1/11)

(3): La fila 2 multiplicada por (-3) se le sumó a la fila 3

3. Se escribe el sistema de ecuaciones que corresponde a la matriz escalonada:

$$\begin{cases} x-2y-3z=-1 \\ y+z=1 \\ z=2 \end{cases}$$

Como ya se tiene el valor de la variable z, en la segunda ecuación se despeja la variable y y se remplaza el valor de z:

$$y = 1 - z \Rightarrow y = 1 - 2 \Rightarrow y = -1$$

En la primera ecuación se despeja la variable x y se remplazan los valores de z y y:

$$x = -1 + 2y + 3z \Rightarrow x = -1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = -1 - 2 + 6 \Rightarrow x = 3$$

Respuesta: El sistema tiene **solución única**: $x = 3$; $y = -1$; $z = 2$

Nota: Aunque se ha seleccionado un sistema de solución única para ilustrar la aplicación del método de eliminación de Gauss, este método se puede utilizar en cualquier caso, es decir para infinitas soluciones o para decidir la inconsistencia del sistema de ecuaciones.

2. Encuentre valores de la constante k para que el sistema $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 5x_1 - 8x_2 + (k^2 - 2)x_3 = k \end{cases}$ tenga:

a) solución única
b) infinitas soluciones
c) ninguna solución

Solución: Utilizando el método de eliminación de Gauss

La matriz aumentada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & -8 & k^2-2 & k \end{array}\right)$ se lleva a la forma escalonada por filas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & -8 & k^2-2 & k \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-5F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & k^2-7 & k-5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & k^2-4 & k-2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{7}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & k^2-4 & k-2 \end{array}\right) = [C : D]$$

Respuesta:

Hacemos el análisis sobre la última fila de la matriz escalonada, para que se den las condiciones que corresponden a cada tipo de solución:

a) El sistema de ecuaciones tiene **solución única** si la constante k toma valores diferentes de 2 y –2, en tal caso $k^2 - 4 \neq 0$ y se puede convertir en 1.
b) El sistema de ecuaciones tiene **infinitas soluciones** cuando $k = 2$, en tal caso la última fila se anula y el sistema queda con menos ecuaciones que variables.
c) El sistema de ecuaciones **no tiene solución** cuando $k = -2$ porque la última fila es de ceros excepto en la columna aumentada (4).

2.2.2. Reducción de Gauss-Jordan

En este método se trabaja un poco más la matriz aumentada del S.E.L. pero se evitan las sustituciones sucesiva, consiste en “diagonalizar” la matriz. En el caso de un sistema con solución única, ésta se lee directamente en la forma reducida de la matriz aumentada.

Este método es el más adecuado especialmente para sistemas de ecuaciones con infinitas soluciones o para S.L.H.

Algoritmo:

(1) Escribir la matriz aumentada [A : B] del sistema de ecuaciones.
(2) Llevar la matriz [A : B] a la forma reducida por filas [C : D].
(3) Escribir el sistema de ecuaciones asociado a la matriz reducida [C : D].
(4) Escribir la solución del sistema de ecuaciones.

En el paso (2) se analiza la matriz reducida, para decidir a cual de las tres casos corresponde la solución :

- Si la parte de los coeficientes (C) es la matriz idéntica, el sistema tiene solución única y se lee la respuesta.

- Si en la matriz aparece una fila de ceros excepto en la última columna, el sistema es inconsistente.

- Si la matriz no presenta inconsistencia pero tampoco corresponde a solución única, el sistema tiene infinitas soluciones y el sistema de ecuaciones asociado a la matriz reducida tiene menos ecuaciones que variables.

Ejemplos:

1. Aplicando el método de reducción de Gauss-Jordan, determinar todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y-z+w=3 \\ 2x-y-z+2w=4 \\ -3y+z=-2 \\ -3x+3y+z-3w=-5 \end{cases}$$

Solución: Siguiendo el algoritmo

1. Escribimos la matriz aumentada: $[A : B] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right)$

2. Llevamos la matriz a la forma reducida por filas:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2/3 & 1 & 7/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = [C : D]$$

(1): La fila 1 multiplicada por (-2) se sumó a la fila 2
multiplicada por 3 se sumó a la fila 4

(2): La fila 2 multiplicada por (-1) se sumó a la fila 3
multiplicada por 2 se sumó a la fila 4.
La fila 2 se multiplicó por (-1/3)

(3): La fila 2 multiplicada por (-1) se le sumó a la fila 1 .

Observando la matriz reducida [C : D], se puede concluir que el sistema tiene infinitas soluciones porque la matriz C no es la matriz idéntica, pero tampoco presenta inconsistencia.

3. El sistema de ecuaciones asociado a la matriz reducida [C : D] es:

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3}z + w = \frac{7}{3} \\ y - \frac{1}{3}z \qquad = \frac{2}{3} \end{cases}$$ que se puede escribir en la forma: $$\begin{cases} x = \frac{7}{3} + \frac{2}{3}z - w \\ y = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}z \end{cases}$$

Observe que el sistema tiene menos ecuaciones (2) que variables (4)

4. Para tener una solución se deben asignar valores a las variables z y w.
z y w, se llaman **variables independientes** porque toman cualquier valor real.
x y y se llaman **variables dependientes** porque sus valores dependen de los valores asignados a z y w.

Respuesta:

Si $z = 1$ entonces $y = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

Si $w = 2$ entonces $x = \frac{7}{3} + \frac{2}{3} - 2 = \frac{9}{3} - 2 = 3 - 2 = 1$

Por tanto, una solución del S.E.L. es: $x = 1$; $y = 1$; $z = 1$; $w = 2$

Otras soluciones se obtienen dando a z y a w diferentes valores:

Si $z = 0$ y $w = 0$ entonces $y = \frac{2}{3}$; $x = \frac{7}{3}$

El sistema tiene **infinitas soluciones** porque a las variables independientes se les puede asignar cualquier valor real.

Nota: Cuando el sistema de ecuaciones se obtiene del planteamiento de un problema de aplicación, aunque el sistema tenga infinitas soluciones, el número de soluciones puede ser limitado según lo que cada variable representa (ver sección 2.3.2 ejemplo 1).

2. Hallar las soluciones del siguiente sistema lineal homogéneo: $\begin{cases} x \quad + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$

Solución: Aplicamos el método de reducción de Gauss-Jordan

Matriz de coeficientes: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Se lleva la matriz a la forma reducida por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

(1): La fila 1 multiplicada por (-2) se sumó a la fila 2
multiplicada por (-3) se sumó a la fila 3

(2): La fila 2 multiplicada por (-1) se sumó a la fila 3

(3): La fila 3 se multiplicó por (-1/3)

(4): La fila 3 multiplicada por (-2) se sumó a la fila 1
multiplicada por 1 se sumó a la fila 2

Respuesta: Como la matriz reducida es la idéntica, el sistema tiene **solución única**
$x = 0$; $y = 0$; $z = 0$, la trivial.

Nota: En un sistema homogéneo la última columna de la matriz aumentada es de ceros y cualquiera que sea la operación elemental que se realice sobre la matriz, esta columna permanece sin variaciones; por tal razón solo se trabaja la matriz de coeficientes.

3. Hallar las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + 2y - z + 3w &= 0 \\ 2x + 2y - z + 2w &= 0 \\ x + \quad 3z + 3w &= 0 \end{aligned}$$

Solución:

La matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ se lleva a la forma reducida por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 8/3 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{pmatrix} \neq I_3$$

(1): La fila 1 multiplicada por (-2) se sumó a la fila 2
multiplicada por (-1) se sumó a la fila 3

(2): Se intercambió la fila 2 con la fila 3

(3): La fila 2 multiplicada por 1 se sumó a la fila 1
multiplicada por (-1) se sumó a la fila 3

(4): La fila 2 se multiplicó por (-1/2).
La fila 3 se multiplicó por (-1/3)

(5): La fila 3 multiplicada por (-3) se sumó a la fila 1
multiplicada por 2 se sumó a la fila 2

De la matriz reducida se deduce:

$$\begin{aligned} x - w &= 0 \quad \Rightarrow \quad x = w \\ y + (8/3)w &= 0 \quad \Rightarrow \quad y = (-8/3)w \\ z + (4/3)w &= 0 \quad \Rightarrow \quad z = (-4/3)w \end{aligned}$$

Esta forma de la solución se llama solución general porque dando valores a la variable independiente w se obtienen valores para las variables dependientes x, y y z.

Respuesta: El sistema de ecuaciones tiene **infinitas soluciones**, dadas por la

Solución general: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ -8/3 \\ -4/3 \\ 1 \end{pmatrix}$ donde w = r $\in \Re$

Para tener una de las infinitas soluciones, se asigna cualquier valor real a w:

Si r = 0 se tiene la solución trivial $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $w = 0$
Si r = 1 se tiene la solución $x = 1$; $y = -8/3$; $z = -4/3$; $w = 1$
Si r = –3 se tiene la solución $x = -3$; $y = 8$; $z = 4$; $w = -3$

Nota: La solución general de un sistema de ecuaciones con infinitas soluciones se presenta en forma matricial, para facilitar el cálculo de cualquiera de las soluciones.

2.2.3. Solución de la ecuación matricial

Todo S.E.L. de orden mxn $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

se puede expresar como una ecuación matricial de la forma:

A.X = B $\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ donde

A es la matriz de coeficientes.
X es la matriz de variables.
B es la matriz de términos independientes.

La solución del sistema de ecuaciones se obtiene resolviendo la ecuación matricial:

Si $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$ (demostración, Sección 1.3.2)

Algoritmo: (para resolver el sistema de ecuaciones)

1. Hallar la matriz A^{-1}, inversa de A
2. Efectuar el producto $A^{-1}B$
3. Leer la solución.

Nota: Como este método de solución hace uso de la matriz inversa, requisito imprescindible para poder aplicarlo es que la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones sea invertible.

Ejemplos:

1. Escribir la ecuación matricial del sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y+z+w=3 \\ 2x-y-z+2w=4 \\ \quad -3y+z \quad =-2 \\ -3x+3y+z-3w=-5 \end{cases}$

Solución:

Ecuación matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$

2. Resolver utilizando la matriz inversa, si es posible, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+2y-2z=3 \\ -2x-y+2z=0 \\ 2x-2y+z=-1 \end{cases}$$

Solución: Siguiendo los paso del algoritmo

1. Hallar A^{-1} la matriz inversa de A (matriz de coeficientes):

$$(A:I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2+2F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -6 & 5 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3+2F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2+2F_3]{F_1+2F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 5 & 4 & 2\\ 0 & 3 & 0 & 6 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{3}F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 5 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5/3 & 2/3\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1-2F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 2/3 & 2/3\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5/3 & 2/3\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1\end{array}\right)=(I:A^{-1})\quad \text{entonces}\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2/3 & 2/3\\ 2 & 5/3 & 2/3\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

2. Efectuar el producto $A^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & 2/3 & 2/3\\ 2 & 5/3 & 2/3\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2/3\\ 6-2/3\\ 6-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7/3\\ 16/3\\ 5\end{pmatrix}$

3. Leer la solución igualando las matrices: $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7/3\\ 16/3\\ 5\end{pmatrix}$

entonces: x = 7/3 ; y = 16/3 ; z = 5 es la única solución del sistema de ecuaciones.

3. Escribir la ecuación matricial del S. E. L. dado y resolverla si es posible

$$\begin{cases}x-y+5z=-4\\ 3y-9z=-3\\ 3x+5y-9z=2\end{cases}$$

Solución: Ecuación matricial: $\begin{pmatrix}1 & -1 & 5\\ 0 & 3 & -9\\ 3 & 5 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ -3\\ 2\end{pmatrix}$

Hallamos A^{-1} si existe

$$(A:I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&5&1&0&0\\0&3&-9&0&1&0\\3&5&-9&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3-3F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&5&1&0&0\\0&3&-9&0&1&0\\0&8&-24&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{3}F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&5&1&0&0\\0&1&-3&0&1/3&0\\0&8&-24&-3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1+F_2]{F_3-8F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&1/3&0\\0&1&-3&0&1/3&0\\0&0&0&-3&-8/3&1\end{array}\right)$$

Esta última matriz nos permite concluir que A^{-1} no existe, por tanto este sistema de ecuaciones no se puede resolver con este método. Se recurre a alguno de los 2 métodos anteriores (eliminación o reducción) para decidir si el sistema tiene infinitas soluciones o si es inconsistente.

4. El sistema de ecuaciones $\begin{cases}-x+2y-3z=5\\3x+y-2z=-3\end{cases}$ no se puede resolver por este método dado que la matriz de coeficientes no es cuadrada y por tanto no es una matriz invertible.

Nota: Un sistema de ecuaciones que no tenga igual cantidad de ecuaciones que variables no puede ser resuelto con matriz inversa; si la matriz no es cuadrada no existe inversa.

Teorema: Si la matriz de coeficientes de un sistema lineal homogéneo (S.L.H.) es invertible, entonces el sistema tiene sólo la solución trivial.

Demostración:

Como en un S.L.H. todos los términos independientes son cero, la ecuación matricial es de la forma: A X = O. Si A es matriz invertible esta ecuación tiene solución única: $X = A^{-1}O = O$ porque cualquier matriz multiplicada por una matriz nula da como resultado la matriz nula del orden correspondiente.

Entonces X = O lo que implica que cada variable $x_i = 0$; por tanto el sistema tiene solución única: $x_1 = 0$; $x_2 =$; . . . ; $x_n = 0$ es decir, la solución trivial.

Ejercicios propuestos:

1. Las siguientes son matrices aumentadas de un sistema de ecuaciones lineales (la última columna es la de los términos independientes). En cada caso identifique: el orden del sistema de ecuaciones, y si el sistema es homogéneo o no y el tipo de solución que tiene (única, infinitas o ninguna):

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

2. Si las siguientes matrices son la forma escalonada de la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones, resuelva en cada caso el correspondiente sistema.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

3. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones decidir si el sistema tiene solución o si es inconsistente. Escriba la forma general de las soluciones si el sistema tiene infinitas soluciones.

a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 0 \\ 7x + 4y + 5z = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \quad + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ 4x + y \quad = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 13x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x = y - 5z - 6 \\ 3y = -3x + 4z + 30 \\ 3z = 6x + 2y - 33 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + 2y = -3z \\ y - 6z = 2x \\ 4x + z = 0 \\ 3y = x + 4z \end{cases}$

4. Encuentre valores de la constante k para que el sistema $\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ 3x + 2y + z = k \\ 5x + 3y + 3z = 2 \end{cases}$

tenga: a) solución única b) ninguna solución c) infinitas soluciones.

5. Determine todos los valores de la constante α para que el sistema homogéneo

$\begin{cases} 3x + 2y - x = 0 \\ x + y + \alpha z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$ tenga solución única.

6. Que condiciones deben tener las constantes a , b y c para que el sistema:

$$\begin{cases} 3x+2y+3z=a \\ -2x+6y-x=b \\ x+3y-z=c \end{cases}$$ sea consistente.

7. Utilice la matriz inversa para determinar la solución de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 6x+5y=2 \\ x+y=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+z=1 \\ x-y-z=0 \end{cases}$

8. Los siguientes sistemas de ecuaciones no son lineales, pero pueden ser resueltos por los métodos lineales mediante cambios de variables apropiados. Sugiera alguna sustitución adecuada en cada caso y resuelva los sistemas:

a) $\begin{cases} 4x=21-\dfrac{9}{y} \\ \dfrac{18}{y}=17-3x \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=2 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{y}=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6senx-2\cos y=1 \\ 4senx+\cos y=3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{5}{2x+y}+\dfrac{4}{2x-3y}=5 \\ \dfrac{15}{2x+y}+\dfrac{2}{2x-3y}=5 \end{cases}$

2.3. APLICACIONES

Aunque no existen formatos generalizados para la solución de problemas de aplicación, en cualquier rama de la matemática se pueden tener en cuenta algunas pautas, que sí son generalizadas, para lograr el abordaje correcto de un problema.

A continuación se enumeran esas **pautas**, para el caso particular de problemas que pueden ser planteados mediante un Sistema de Ecuaciones Lineales:

1. Identificar y **definir** las variables con base en las preguntas. La buena definición de las variables, permite la correcta interpretación de los resultados analíticos.

2. Plantear el sistema de ecuaciones con base en la información del enunciado. Generalmente una frase con sentido gramatical completo, permite plantear una ecuación.

3. Resolver en forma analítica el sistema de ecuaciones utilizando alguno de los métodos conocidos.

4. Interpretar los resultados de la solución del sistema de ecuaciones con base en la definición de las variables y **responder** la(s) pregunta(s).

La importancia en el análisis de la solución de un sistema de ecuaciones radica en la correcta interpretación de los resultados. Una acertada interpretación conlleva a la efectividad de las soluciones propuestas para el problema.

2.3.1. Problemas con solución única

Ajuste de curvas: Una de las aplicaciones más frecuentes de los sistemas de ecuaciones lineales se da en el análisis de datos experimentales.

En muchos problemas de física, de las ciencias sociales y de la ingeniería en particular, se requiere relacionar los datos recolectados en un experimento mediante una ecuación matemática que permita, describir el comportamiento del evento analizado y hacer algunas predicciones en diferentes tiempos.

El tipo de ecuaciones que permiten “mejor ajuste” son las ecuaciones polinómicas, el proceso consiste en obtener un polinomio cuya gráfica pase por los puntos recolectados. A continuación se describe el proceso:

Si el conjunto de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ son los datos que se quieren ajustar a la curva de un polinomio de grado n, y todas las primeras coordenadas (x_i) son diferentes, se puede demostrar que existe un polinomio único de grado menor o igual a (n-1) de

la forma $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1}$ al cual se pueden ajustar los n datos experimentales.

Los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}$ del polinomio se obtienen, sustituyendo cada uno de los datos en la ecuación y resolviendo el sistema de ecuaciones lineales que se forma.

Ejemplos:

1. Encuentre la ecuación de una función cuadrática que pasa por los puntos (0, 1), (1, 2) y (–1, 6).

Solución: Observe que se dan 3 puntos y el polinomio pedido es de grado 2, uno menos que el número de puntos conocidos.

La ecuación general de la función cuadrática es: $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ entonces, remplazando cada uno de los puntos se forma el sistema de ecuaciones lineales:

$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ a_0 - a_1 + a_2 = 6 \end{cases}$ cuya matriz aumentada es (A : B) = $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right)$

Aplicando el método de reducción de Gauss-Jordan , se tiene que la forma reducida de la

matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right)$ es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$, de donde se deduce: $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -2 \\ a_2 = 3 \end{cases}$

Por tanto la ecuación pedida es: $y = 1 - 2x + 3x^2$

2. Se sabe que la ecuación general de una circunferencia es $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (3, 3), (8, -2) y (6, 2).

Solución: Al sustituir los puntos en la ecuación general se obtiene el sistema

$\begin{cases} 3a + 3b + c = -18 \\ 8a - 2b + c = -68 \\ 6a + 2b + c = -40 \end{cases}$ que debe tener solución única

se puede resolver por medio de A $^{-1}$, inversa de la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 8 & -2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ entonces } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/5 & -1/10 & 1/2 \\ -1/5 & -3/10 & 1/2 \\ 14/5 & 6/5 & -3 \end{pmatrix}$$

Luego $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 & -1/10 & 1/2 \\ -1/5 & -3/10 & 1/2 \\ 14/5 & 6/5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -18 \\ -68 \\ -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$

Por tanto la ecuación de la circunferencia es: $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$

3. Un obrero ha trabajado durante 30 días para dos patrones ganando $207.000. El primero le pagaba $6.500 diarios y el segundo $8.000. ¿Cuántos días trabajó para cada patrón?

Solución: Siguiendo las pautas sugeridas para abordar problemas de aplicación.

Definición de variables: (con base en la pregunta)

x : número de días trabajados con el primer patrón.
y : número de días trabajados con el segundo patrón.

Planteamiento del sistema de ecuaciones: (con base en la información)

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 6500x + 8000y = 207000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 30 \\ 13x + 16y = 414 \end{cases}$$

dividiendo la segunda ecuación por 500

Solución analítica: (método de reducción de Gauss-Jordan)

Matriz aumentada del sistema de ecuaciones: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 30 \\ 13 & 16 & 414 \end{array}\right)$

Forma reducida de la matriz aumentada: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 22 \\ y = 8 \end{cases}$

Respuesta: El obrero trabajó 22 días para el primer patrón y 8 días para el segundo.

4. En un salón de dibujo hay 56 mesas, x número de mesas con 4 butacas, y mesas con 8 butacas y z mesas con 10. La capacidad de butacas del salón es 364. Durante una tarde se utilizaron la mitad de las mesas con 4 butacas, la cuarta parte de las mesas con 8 y la décima parte de las de 10 butacas para un total de 19 mesas. Cuántas mesas de cada tamaño se usaron esa tarde?

Solución:

Variables: x : cantidad de mesas con 4 butacas que hay en el salón..
y : cantidad de mesas con 8 butacas que hay en el salón.
z : cantidad de mesas con 10 butacas que hay en el salón.

Sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y+z=56 \\ 4x+8y+10z=364 \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{10}z=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=56 \\ 2x+4y+5z=182 \\ 10x+5y+2z=380 \end{cases}$

Dividiendo la segunda ecuación por 2 y multiplicando la tercera por 20.

Solución analítica del sistema de ecuaciones (método de Gauss-Jordan):

Matriz aumentada: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 56 \\ 2 & 4 & 5 & 182 \\ 10 & 5 & 2 & 380 \end{array}\right)$

Matriz reducida: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 26 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x=26 \\ y=20 \\ z=10 \end{cases}$ es la solución del sistema.

Interpretación y respuesta: Esa tarde se ocuparon 13 mesas con 4 butacas (la mitad), 5 mesas con 8 butacas (la cuarta parte) y solo 1 mesa con 10 butacas (la décima parte), lo cual suma 19 mesas que fueron las utilizadas esa tarde.

2.3.2. Problemas con mas de una solución

Sistemas de ecuaciones lineales con infinitas soluciones, por ser el planteamiento de un problema de aplicación, pueden tener realmente sólo un número finito de soluciones, debido a la definición de las variables y la interpretación de los resultados analíticos.

Ejemplos:

1. Una firma de transportes posee tres tipos distintos de camiones, A, B y C. Los camiones están equipados para el transporte de 2 clases de maquinaria pesada. El número de máquinas de cada clase que puede transportar cada tipo de camión está dada por la matriz $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, donde las columnas representan los tipos de camiones (A, B y C respectivamente), y las filas la clase de maquinaria (clase I y clase II respectivamente).

La firma consigue una orden para transportar 32 máquinas de la clase I y 10 máquinas de la clase II. Encuentre el número de camiones de cada tipo que se requieren para cumplir la orden, asumiendo que, cada camión debe estar completamente cargado y el número exacto de máquinas pedidas es el que se debe despachar. Si la operación de cada tipo de camión tiene el mismo costo para la firma, cuál es la solución más económica?

Solución: Seguiremos los pasos propuestos para el planteamiento y solución de problemas de aplicación.

Definición de las variables:

x: cantidad de camiones Tipo A que se necesitan para cumplir la orden
y: cantidad de camiones Tipo B que se necesitan para cumplir la orden
z: cantidad de camiones Tipo C que se necesitan para cumplir la orden

Planteamiento del sistema de ecuaciones:

$$2x + 1y + 1z = 32 \quad (1)$$
$$0x + 1y + 2z = 10 \quad (2)$$

La ecuación (1) se formó tomando de la matriz T, la cantidad de máquinas clase I que cada tipo de camión puede transportar, y multiplicando por la cantidad de camiones, para completar el total de máquinas pedidas de clase I.
En forma análoga se plantea la ecuación (2)

Solución del sistema de ecuaciones: En este ejemplo se utiliza el método de reducción de Gauss-Jordan:

Matriz aumentada del sistema de ecuaciones: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 32 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \end{array}\right)$

Forma reducida por filas de la matriz aumentada: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \end{array}\right)$

Sistema de ecuaciones que corresponde a la matriz reducida:

$x - (½)z = 11 \Rightarrow x = 11 + (½)z$
$y + 2z = 10 \Rightarrow y = 10 - 2z$

Solución general del sistema de ecuaciones: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1/2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donde $z = r \in \Re$

Interpretación de la solución analítica: Aunque r representa cualquier valor real, en este caso por la definición de las variables (cantidad de camiones), solo tiene sentido los valores enteros positivos de las tres variables.

Veamos las posibilidades: Si $r = 0$ entonces $x = 11$; $y = 10$; $z = 0$
Si $r = 2$ entonces $x = 12$; $y = 6$; $z = 2$
Si $r = 4$ entonces $x = 13$; $y = 2$; $z = 4$

Respuesta: Para cumplir con el pedido existen tres opciones:
11 camiones Tipo A y 10 camiones Tipo B , ó ,
12 camiones tipo A, 6 camiones Tipo B y 2 camiones Tipo C , ó ,
13 camiones Tipo A, 2 camiones Tipo B y 4 camiones tipo C.

Como la operación de cualquier tipo de camión tiene el mismo costo, la solución mas económica es la última, es decir 13 camiones Tipo A, 2 camiones Tipo B y 4 camiones tipo C, pues en este caso solo se utilizan 19 camiones.

2. Encuentre la ecuación cartesiana de la recta que pasa por los puntos de coordenadas (2, 3) y (-1,2)

Solución: Como los 2 puntos dados están en la recta, deben satisfacer la ecuación de dicha recta.

Tomamos entonces la ecuación general de la recta : $ax + by + c = 0$, donde a, b y c son las constantes por determinar. En este caso constituyen las variables.

El sistema de ecuaciones que se forma con los 2 puntos conocidos es el siguiente.

$$\begin{cases} 2a+3b+c=0 \\ -a+2b+c=0 \end{cases}$$

Aplicamos el método de reducción de Gauss-Jordan

Matriz de coeficientes: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ con forma reducida: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/7 \\ 0 & 1 & 3/7 \end{pmatrix}$

El sistema de ecuaciones que corresponde a la matriz reducida es:

$$a - \frac{1}{7}c = 0 \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{7}c$$

$$b + \frac{3}{7}c = 0 \;\Rightarrow\; b = -\frac{3}{7}c$$

Como el sistema tiene infinitas soluciones le podemos asignar cualquier valor a la constante c para obtener los valores de a y b: si $c = 7 \Rightarrow a = 1$ y $b = -3$.

La ecuación de la recta pedida es: $x - 3y + 7 = 0$

Balanceo de ecuaciones: El balanceo de las ecuaciones que describen reacciones de ciertos procesos químicos, consiste en encontrar constantes tales que el número de átomos de cada uno de los elementos del lado izquierdo de la ecuación iguale al número de átomos del lado derecho.

Ejemplo:

Efectuar el balanceo de la ecuación química $Mg_3N_2 + HOH \rightarrow Mg(OH)_2 + NH_3$

Solución: En este caso las variables son las constantes a, b, c y d que igualan la cantidad de átomos de cada elemento en los dos lados de la ecuación, es decir:

$$aMg_3N_2 + bHOH \rightarrow cMg(OH)_2 + dNH_3$$

Para el magnesio (Mg): en el lado izquierdo de la ecuación hay $3a$ átomos al lado izquierdo y c átomos al derecho, entonces $3a = c \Rightarrow 3a - c = 0$

En forma análoga se tiene:
Para el nitrógeno (N): $2a = d \Rightarrow 2a - d = 0$
Para el oxígeno (O): $b = 2c \Rightarrow b - 2c = 0$
Para el hidrógeno (H): $2b = 2c + 3d \Rightarrow 2b - 2c - 3d = 0$

Se obtiene el sistema lineal homogéneo $\begin{cases} 3a - c = 0 \\ 2a - d = 0 \\ b - 2c = 0 \\ 2b - 2c - 3d = 0 \end{cases}$

La matriz de coeficientes del sistema es $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ y su forma reducida es

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de la cual se deduce: $\begin{cases} a = \frac{1}{2}d \\ b = 3d \\ c = \frac{3}{2}d \end{cases}$

Si $d = 2$ entonces $a = 1$; $b = 6$ y $c = 3$

Por tanto la ecuación balanceada es: $Mg_3N_2 + 6HOH \rightarrow 3Mg(OH)_2 + 2NH_3$

Flujo de tráfico: Un sistema de ecuaciones lineales con infinitas soluciones también permite resolver problemas relacionados con el flujo de tráfico en una red vial.

3.

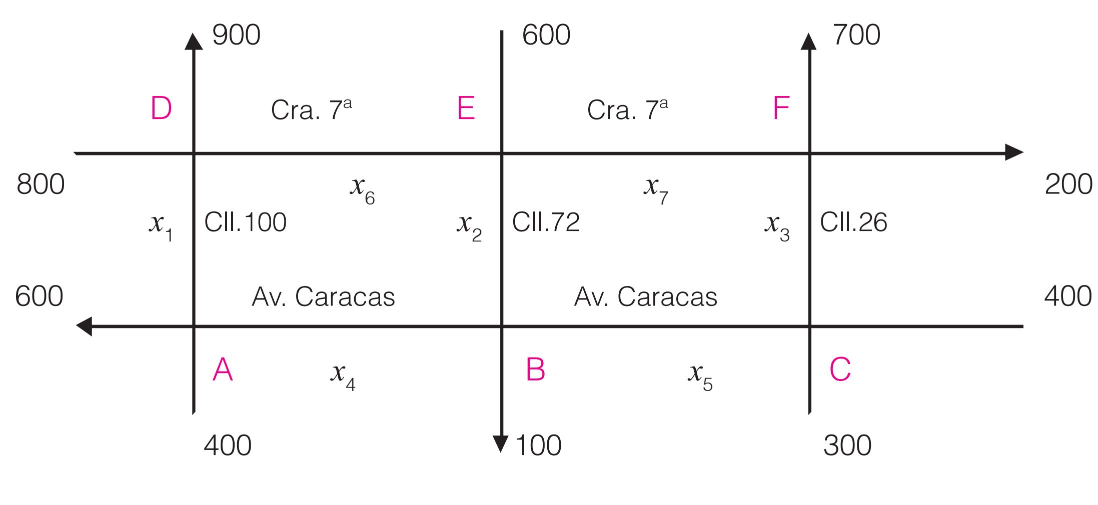


Fig. 2.7

El anterior mapa (figura 2.7) indica el flujo de tráfico que entra o sale a cada calle de la ciudad, en unidades de vehículos por hora (vph).

Como el flujo de tráfico varía notablemente durante el día, se supone que los números en la figura indican el flujo promedio en las horas pico, que se da aproximadamente entre las 5p.m. y las 6:30 p.m.

Suponga que se tiene planeada una marcha de protesta sobre la avenida Caracas, desde la calle 72 hasta la calle 100 a las 6 p.m. del día martes. La policía de la ciudad puede controlar hasta cierto punto el tráfico vehicular, reajustando los semáforos, colocando policías en cruces estratégicos o cerrando el tráfico en la calle crítica. Si se disminuye el tráfico por la avenida Caracas aumentará el flujo en las calles adyacentes. La pregunta es ¿Cómo minimizar el tráfico por el recorrido de la marcha, sin que se congestionen las calles aledañas?

Solución: Las variables x_1, x_2 hasta x_7 representan el flujo de tráfico sobre cada tramo de la red (las calles). El problema consiste en hallar los valores de las variables de tal forma que x_4 sea lo menor posible.

Para que el tráfico no se acumule, en cada esquina el tráfico de entrada debe ser igual al de salida. Veamos lo que pasa en cada esquina según el mapa:

en A: $x_4 + 400 = x_1 + 600 \Rightarrow x_1 - x_4 = -200$

en B: $x_2 + x_5 = x_4 + 100 \Rightarrow x_2 - x_4 + x_5 = 100$

en C: $700 = x_3 + x_5 \Rightarrow x_3 + x_5 = 700$ Sistema de ecuaciones

en D: $x_1 + 800 = x_6 + 900 \Rightarrow x_1 - x_6 = 100$

en E: $x_6 + 600 = x_2 + x_7 \Rightarrow x_2 - x_6 + x_7 = 600$

en F: $x_3 + x_7 = 900 \Rightarrow x_3 + x_7 = 900$

matriz aumentada del sistema de ecuaciones:
$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -200 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 700 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 900 \end{array}\right)$$

forma reducida: $\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 900 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

El sistema de ecuaciones que corresponde a esta matriz reducida es:

$x_1 = x_6 + 100$ (1)
$x_2 = x_6 - x_7 + 600$ (2)
$x_3 = -x_7 + 900$ (3)
$x_4 = x_6 + 300$ (4)
$x_5 = x_7 - 200$ (5)

Aunque este es un sistema de ecuaciones con infinitas soluciones, hay que tener en cuenta que todas las variables deben tomar valores positivos ya que representan unidades de vehículos por hora (vph). Se deduce entonces lo siguiente:

De la cuarta ecuación: $x_4 \geq 300$
Si $x_4 = 300$ entonces: $x_6 = 0$ y $x_1 = 100$

De la segunda ecuación: $x_7 \leq 600$
Si $x_7 = 600$ y $x_6 = 0$ entonces $x_2 = 0$ y $x_5 = 400$

De la quinta ecuación: $x_7 \geq 200$
Si $x_7 = 200$ y $x_6 = 0$ entonces $x_2 = 400$ y $x_5 = 0$

Interpretación: Para que el flujo vehicular por la avenida Caracas entre las calles 72 y 100 sea mínimo, es decir $x_4 = 300$ vph. , hay dos soluciones:

(1) Se debe suspender el tráfico en los tramos x_5 y x_6, en x_7 debe ser de 200 vph. , en x_2 debe ser de 400 vph. , en x_1 debe ser de 100 vph. y de 700 vph. en x_3.

(2) Se debe suspender el tráfico en los tramos x_2 y x_6, en x_7 debe ser de 600 vph. , en x_3 debe ser de 300 vph. , en x_1 debe ser de 100 vph. y de 400 vph. en x_5.

Ejercicios propuestos:

1. Dos obreros trabajan 8 horas diarias en la misma empresa. El primero gana 500 pesos diarios menos que el segundo, pero ha trabajado durante 30 jornadas mientras que el

primero trabajó sólo 24. Si el primero ha ganado 33.000 pesos más que el segundo calcule el salario diario de cada obrero.

2. La ecuación general de un plano en el espacio es $ax + by + cz + d = 0$. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos (-1, -2, 0) ; (-5, -3, 1) y (3, 4, 2).

3. Efectuar el balanceo de la ecuación química:
$MnSO_4 + KMnO_4 + H_2O \rightarrow MnO_2 + K_2SO_4 + H_2SO_4$

4. Tres máquinas juntas producen 64 partes en una hora. El triple de la producción de la primera máquina es igual a la producción de las otras dos juntas. El quíntuplo de la producción de la segunda máquina es 12 partes mayor que el doble de la producción de las otras dos juntas. Hallar la velocidad de producción de las tres máquinas.

5. El siguiente mapa (figura 2.8) indica el flujo de tráfico (en vehículos por hora) que transita por las calles de un sector determinado. Minimizar el tráfico por la calle x_5 sin ocasionar congestionamientos en las calles circundantes.

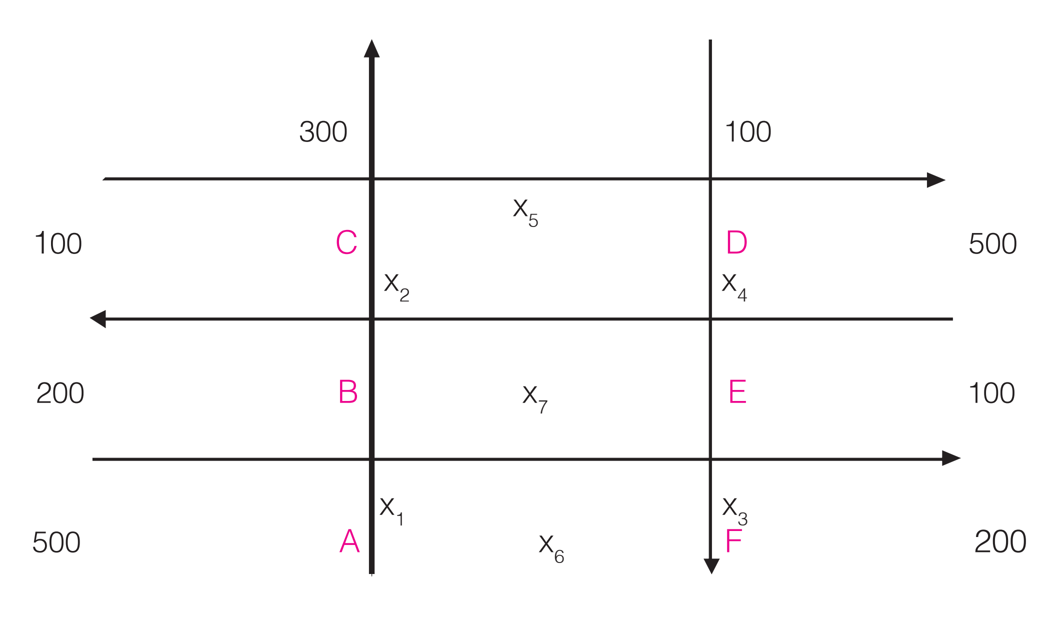


Fig. 2.8

6. Para llenar un tanque de almacenamiento de agua con capacidad para 300 galones, se emplea un solo tubo de entrada. Para proveer de agua para riego a los campos de los alrededores se emplean 2 tubos de salida del mismo diámetro. Cuando los 2 tubos de salida están abiertos se necesitan 5 horas para llenar el tanque, y cuando una de ellas está cerrada sólo toma 3 horas. Encuentre los flujos (en galones por hora) de entrada y de salida del tanque.

RESUMEN

Una **ecuación lineal** es de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$, todos los términos, excepto el término independiente son de grado 1. En esta ecuación b es el **término independiente**, a_1, a_2, a_3, . . . y a_n son los **coeficientes** y x_1, x_2, x_3, . . . y x_n son las **variables**.

Un **sistema de ecuaciones lineales** (S.E.L.) es un conjunto de ecuaciones lineales. Se dice que el sistema es de **orden mxn** si tiene m ecuaciones y n variables. Un sistema de ecuaciones en el cual todos los términos independientes son cero, se llama **sistema lineal homogéneo** (S.L.H.).

Todo sistema de ecuaciones se puede expresar en forma de **ecuación matricial** como **A.X = B,** donde A es la matriz de coeficientes, B es la matriz de los términos independientes, y X es la matriz de las variables. Si el sistema es homogéneo la ecuación matricial es **A.X = O**.

Una **solución** de un sistema de ecuaciones de orden mxn, es un conjunto de n valores que al ser sustituidos en la m ecuaciones satisfacen todas las igualdades.

Resolver un sistema de ecuaciones es hallar el conjunto de soluciones y se pueden presentar 3 casos: que el S.E.L. tenga **solución única** (solo una); que tenga **infinitas soluciones** (más de una), o que sea **inconsistente** (no tiene solución).

Se pueden utilizar los siguientes **métodos de solución**: eliminación de Gauss, reducción de Gauss-Jordan, solución de la ecuación matricial por medio de la matriz inversa, o la regla de Cramer. Los 3 primeros son métodos matriciales, el último se basa en el cálculo de determinantes (unidad 3).

El método de **eliminación de Gauss** consiste en llevar a la forma escalonada por filas, la matriz aumentada (A : B) del S.E.L. El método de **reducción de Gauss-Jordan** consiste en llevar a la forma reducida por filas, la matriz aumentada (A : B) del S.E.L. Si la matriz de coeficientes de la **ecuación matricial** es invertible, la solución del S.E.L. es $X = A^{-1}.B$ (se obtiene al resolver la ecuación A.X = B).

Los problemas que contengan mucha información que se pueda resumir en una matriz, admiten un planteamiento por medio de un sistema de ecuaciones lineales (que puede ser homogéneo), cuya solución permite dar respuesta a los interrogantes planteados en el problema.

GLOSARIO

Ecuación lineal es aquella en la que todos los términos, excepto el término independiente, son de grado 1.

Término independiente de una ecuación lineal es la constante que no es coeficiente.

Los **coeficientes** de una ecuación lineal son las constantes que acompañan a las variables.

Sistema de ecuaciones lineales de orden mxn (S.E.L.) es un conjunto de m ecuaciones lineales con n variables.

Sistema lineal homogéneo (S.L.H.) es un conjunto ecuaciones lineales en el que todos los términos independientes son cero.

Matriz de coeficientes es la matriz que se forma con los coeficientes de un sistema de ecuaciones. Cada fila contiene los coeficientes de una ecuación y cada columna los coeficientes de una variable.

Ecuación matricial es una ecuación de la forma A.X = B, donde A, X y B son matrices y X es una matriz desconocida. (Su solución $X = A^{-1}.B$ representa la solución de un S.E.L.).

Eliminación de Gauss es un método matricial para resolver un S.E.L. que consiste en llevar a la forma escalonada por filas la matriz aumentada (A : B).

Reducción de Gauss-Jordan es un método matricial para resolver un S.E.L. que consiste en llevar a la forma reducida por filas la matriz aumentada (A : B).

Matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, es la matriz que se forma aumentando a la matriz de coeficientes la columna de los términos independientes (al lado derecho).

AUTOEVALUACIÓN

Decidir en cada caso si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F):

1. $\begin{cases} x-y-3=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ es un sistema lineal homogéneo.

2. $\begin{cases} x+y^2+y=0 \\ y-x^2-x=0 \end{cases}$ tiene solución única porque hay 2 ecuaciones y 2 incógnitas.

3. Un sistema de ecuaciones lineales de orden 2x3 tiene infinitas soluciones.

4. $\begin{cases} x=3-y-z \\ y+z=2+x \\ z-x-y=0 \end{cases}$ es un sistema de ecuaciones lineales con solución única.

5. Todo sistema lineal homogéneo es consistente.

6. El sistema $\begin{cases} 2x+y-w=0 \\ y-5z+3w=0 \\ x+2y-5z=0 \end{cases}$ tiene infinitas soluciones.

En cada caso seleccione la respuesta correcta:

7. El siguiente sistema de ecuaciones representa un par de rectas paralelas:

a) $\begin{cases} 3x-7=2y \\ 6x-4y=14 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x-6y=4 \\ x-2y=7 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x=y-3 \\ -4x+2y=6 \end{cases}$

8. La matriz aumentada del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ z+x=3 \end{cases}$ es:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

9. Una ecuación del plano que pasa por los puntos (2, 2, -1); (1, 3, 0) y (-1, 0, 4) es:

a) $7x + 2y + 5z - 13 = 0$ **b)** $-7x - 2y - 5z = 13$

c) $7x + 2y + 5z + 13 = 0$ **d)** $7x - 2y - 5z = -13$

10. El sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky + 8z = 3 \end{cases}$ tiene solución única para:

a) $k = 0$ **b)** $k = -4$ **c)** $k = 4$ **d)** ningún valor de k

11. Un sistema de ecuaciones lineales es inconsistente si la matriz aumentada:

a) Tiene mas filas que columnas.
b) No es cuadrada.
c) Es equivalente a una matriz idéntica.
d) Tiene al menos una fila de ceros.

12. La intersección de los planos: $2x - 3y - z = -1$; $-x + 3y - z = 2$ y $x + 2y + 2z = 1$ es:

a) Un punto. **b)** Una recta. **c)** Tres puntos. **d)** No existe.

RETROALIMENTACIÓN

Respuestas a los ejercicios propuestos.

Sección 2.1 (página 61): **1.** a) falso. b) falso. c) falso. d) verdadero.

2. Tiene infinitas soluciones porque hay 2 ecuaciones y 3 variables.

3. a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \\ z + w = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + 2z = -3 \end{cases}$

4. a) y c) infinitas soluciones. b) y d) solución única.

5. a) $\begin{cases} -y + 2z = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3u - 3v = 1 \\ u + 2w = 1 \\ -x + v = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_4 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2a + 2b + 2c = 2 \\ a + b + c = 1 \\ 3c = 3 \\ 4a + 4b = 4 \end{cases}$

Sección 2.2 (página 75): **1.** a) S. L. H. de orden 3 con infinitas soluciones.

b) S .E. L. de orden 3x2 inconsistente c) S. L. H. de orden 4 con solución única

d) S. E .L. de orden 3 inconsistente. **2.** a) x = 1 ; y = 1 ; z = 2

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) no tiene solución.

3. a) inconsistente. b) solución general $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) solución única x = 0 ; y = 0 ; z = 0 e) x = 3 ; y = 3 ; z = -3 f) x = 0 ; y = 0 ; z = 0

4. a) $k \neq -1$ b) $k = -1$ c) ninguno. **5.** $\alpha \neq 0$ **6.** Ninguna.

7. a) x = 17 ; y = -20 b) x = 1 ; y = = ½ ; z = ½

8. a) Si $v = \dfrac{1}{y}$ se tiene $\begin{cases} 4x + 9v = 21 \\ 3x + 18v = 17 \end{cases}$ b) Si $u = \dfrac{1}{x}$ y $v = \dfrac{1}{y}$ se tiene $\begin{cases} u + 4v = 2 \\ 2u + 6v = 5 \end{cases}$

c) Si $u = sen\ x$ y $v = cos\ y$ se tiene $\begin{cases} 6u - 2v = 1 \\ 4u + v = 3 \end{cases}$ solución: $x = \pi/6$, $y = 0$

d) Si $u = \dfrac{1}{2x + y}$ y $v = \dfrac{1}{2x - 3y}$ se tiene $\begin{cases} 5u + 4v = 5 \\ 15u + 2v = 5 \end{cases}$ solución: x = 4 , y = 1

Sección 2.3 (página 87):

1. Variables: x salario diario del primer obrero; y salario del otro obrero.

Ecuaciones $\begin{cases} y = x + 500 \\ 30x = 24y + 33000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 500 \\ 5x - 4y = 5500 \end{cases}$

El primer obrero gana $7500 diarios y el segundo gana $8000 diarios.

2. $-2x + 3y - 5z + 4 = 0$ 3. $3MnSO_4 + 2KMnO_4 + 2H_2O \rightarrow 5MnO_2 + K_2SO_4 + 2H_2SO_4$

4. Ecuaciones $\begin{cases} x+y+z=64 \\ 3x=y+z \\ 5y=2(x+z)+12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=64 \\ 3x-y-z=0 \\ -2x+5y-2z=12 \end{cases}$

Variables: velocidad de producción de cada máquina.
La primera máquina produce 16 partes por hora, la segunda 20 y la tercera 28.

5. El mínimo tráfico vehicular que se puede tener por la calle x_5 sin que se las calles aledañas se congestionen es de 400 vph. , con las siguientes condiciones:

(1) Se suspende el tráfico por las calles x_3 , x_4 y x_7 , por la calle x_1 se deja un flujo de 700 vph. , en x_2 de 600 vph. , y de 500 vph. en x_6.
(2) Se suspende el tráfico por la calle x_4 , en x_3 y x_7 deja un flujo de 100 vph. , en x_2 y en x_6 debe ser de 600 vph. y de 800 vph. en x_1.

6. Variables: x flujo de entrada del agua; y flujo de salida del agua

Ecuaciones $\begin{cases} 5x-5y=300 \\ 3x-\frac{3}{2}y=300 \end{cases}$ solución: : x = 140 gal/h ; y = 80 gal/h

Solución Autoevaluación Unidad 2: (página 91)

1. La afirmación es **falsa**. En la primera ecuación el término independiente es 3.

2. La afirmación es **falsa**. Las ecuaciones no son lineales.

3. La afirmación es **falsa**. El sistema de ecuaciones puede ser inconsistente.

4. La afirmación es **verdadera**. La matriz aumentada del sistema de ecuaciones es

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y su forma reducida es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$ de la cual se deduce

que el sistema tiene solución única: x = 1/2 ; y = 1 ; z = 3/2.

5. La afirmación es **verdadera**. Todo sistema homogéneo tiene al menos la solución trivial, por lo que siempre tiene solución, es decir es consistente.

6. La afirmación es **verdadera**. Este sistema es homogéneo y tiene 3 ecuaciones y 4 variables, y todo sistema homogéneo con menos ecuaciones que variables tiene infinitas soluciones.

7. La respuesta correcta es **b).** Este sistema de ecuaciones es inconsistente lo cual significa que las rectas no tienen puntos comunes, es decir son paralelas.

8. La respuesta correcta es **d).** La matriz de coeficientes es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la de los términos independientes $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, por tanto la matriz aumentada es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

9. La respuesta correcta es **a).** Al remplazar las coordenadas de los 3 puntos dados en la ecuación general del plano, se tiene el sistema de ecuaciones:

$\begin{cases} 2a+2b-c+d=0 \\ a+3b+d=0 \\ -a+4c+d=0 \end{cases}$, para el cual la matriz de coeficientes es: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

y tiene la forma reducida: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7/13 \\ 0 & 1 & 0 & 2/13 \\ 0 & 0 & 1 & 5/13 \end{pmatrix}$, de la cual se deduce: $\begin{cases} a=-\dfrac{7}{13}d \\ b=-\dfrac{2}{13}d \\ c=-\dfrac{5}{13}d \end{cases}$

Si d = -13 entonces a = 7 ; b = 2 ; c = 5

10. La respuesta correcta es **d).** El sistema tiene menos ecuaciones que variables, por lo tanto, o tiene infinitas soluciones o es inconsistente.

11. La respuesta correcta es **c).** Si la matriz aumentada del sistema de ecuaciones es equivalente a una matriz idéntica (de cualquier orden) la última fila de la matriz define la inconsistencia 0 = 1 cuando se escriba el sistema asociado a ella.

12. La respuesta correcta es **a).** Las ecuaciones de los 3 planos definen un sistema de ecuaciones con solución única: x = 1/3 ; y = 2/3 ; z = -1/3 porque:

matriz aumentada: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; matriz reducida: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}$.

3. DETERMINANTES

"Una buena notación tiene una sutileza y ejerce una sugestión tal que a veces parece como un maestro vivo."

Bertrand Russell.

INTRODUCCIÓN

La teoría de los determinantes fue conocida por los chinos hace más de 2000 años, en los trabajos desarrollados para la solución de los sistemas de ecuaciones. Ellos encontraron relaciones importantes entre los coeficientes de las ecuaciones del sistema y las soluciones que obtuvieron, las cuales corresponden a las definiciones de los determinantes de orden 2 y 3.

Mucho tiempo después, a mediados de los siglos XVIII y XIX, se dieron a conocer importantes aportes. A.L. Cauchy y G.W. Leibnitz desarrollaron las propiedades de los determinantes; P.S. Laplace hizo la expansión de un determinante por cofactores, y C.G. Jacobi, aplicó los determinantes a las funciones de varias variables para el desarrollo del cálculo vectorial.

En esta unidad, vamos a definir el concepto de determinante y a estudiar sus propiedades. Los determinantes de orden 2 y 3 se calculan directamente. Para calcular determinantes de orden mayor se utilizan convenientemente las propiedades.

OBJETIVO GENERAL

Generalizar el cálculo de los determinantes de orden n y sus aplicaciones, a partir de las propiedades enunciadas con los determinantes de orden 2 y 3.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Calcular directamente determinantes de orden 2 y de orden 3.
- Identificar y aplicar las propiedades de los determinantes para calcular su valor.
- Aplicar los determinantes a la solución de sistemas de ecuaciones lineales.
- Encontrar la inversa de una matriz no singular.

CONTENIDO

3.1. La función determinante.
3.1.1. Definición por cofactores.
3.1.2. Propiedades.

3.2. Aplicaciones de los determinantes.
3.2.1. Regla de Cramer.
3.2.2. Matriz inversa.

3.1. LA FUNCIÓN DETERMINANTE

A toda matriz cuadrada de cualquier orden, se asocia un número real llamado el determinante de la matriz. El cálculo riguroso de un determinante se hace sumando productos de permutaciones entre sus elementos, por lo que el cálculo directo es práctico solamente para los determinantes de orden 2 y 3. A medida que aumenta el orden del determinante, crece factorialmente el número de operaciones que se deben realizar para calcular su valor, lo cual hace más eficiente el uso de las propiedades.

Definición: Se define la FUNCIÓN DETERMINANTE entre el conjunto de las matrices reales de orden n (M_n) y el conjunto de los números reales ($\Re$) como:

$$\text{det: } M_n \longrightarrow \Re$$
$$A_n \rightarrow \det(A_n) = |A_n|$$

Notación: Se distingue entre la matriz A y su determinante utilizando paréntesis para la matriz y barras verticales para su determinante:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{mn3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{pero } \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = r$$

La matriz es un conjunto de elementos dispuestos en forma rectangular, mientras que el determinante es un número real que puede ser positivo, negativo o cero.

Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ el determinante de A se expresa como: $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$.

Los casos particulares de los determinantes de orden 2 y 3 se definen a continuación.

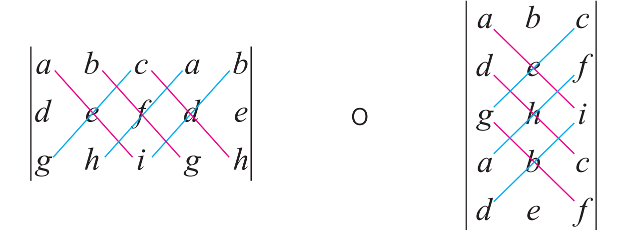
Definición: El DETERMINANTE DE ORDEN 2 queda definido por el producto de los elementos de la diagonal principal, menos el producto de los elementos de la otra diagonal.

$$A_2 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \Rightarrow |A_2| = \begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = p\,s - q\,r$$

Definición: Si $A_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ se define el DETERMINANTE DE ORDEN 3 como:

$$\det(A_3) = |A_3| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + dhc) - (ceg + bdi + fha).$$

En la práctica, se acostumbra repetir las dos primera columnas (o filas) para tener completas las diagonales con tres elementos: (rojas positivos; azules negativos).



Ejemplos:

1. Si $T = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ calcular $|T|$.

Solución: Aplicando la definición del determinante de orden 2 se tiene:

$$|T| = 3 \cdot 7 - 4 \cdot (-5) = 21 + 20 = 41$$

2. Si $B = \begin{pmatrix} x+2 & 3 \\ 4 & 3+x \end{pmatrix}$ hallar valores de x tales que $\det(B) = 0$.

Solución: Aplicando la definición y considerando la condición dada se tiene:

$$\det(B) = (x+2)(3+x) - 4 \cdot 3 = x^2 + 5x - 6 = 0.$$

Resolviendo la ecuación se tiene $x = -6$ o $x = 1$, valores para los cuales $\det(B) = 0$.

3. Calcular $|D|$ si $D = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Solución: Aplicando la definición del determinante de orden 3 se tiene:

$$|D| = [4\cdot 1\cdot 8 + (-3)(-5)\cdot 0 + 2\cdot 6\cdot 7] - [0\cdot 1\cdot 7 + 6\cdot(-5)\cdot 4 + 2\cdot(-3)\cdot 8]$$

$$= (32 - 0 + 84) - (0 - 120 - 48) = 116 - (-168) = 284.$$

Entonces: $\det(D) = |D| = 284$.

Para un determinante de orden 4 en adelante, el cálculo directo se hace muy poco práctico: con 4 elementos se pueden hacer 24 (4!) permutaciones, con 5 elementos son 120 (5!) y así sucesivamente. Estos cálculos se pueden indicar haciendo la “expansión” del determinante por alguna fila o columna, con base en los cofactores de cada elemento de la fila o columna seleccionada.

3.1.1. Definición por cofactores

Una alternativa para definir un determinante, es aplicar el concepto de cofactor en forma recurrente, para ir reduciendo el orden del determinante.

Definición: Se llama MENOR-ij de una matriz A, al valor del determinante que resulta suprimiendo en A, la fila i y la columna j. Se denota M_{ij}.

Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -5 \\ 4 & 7 & 0 \\ 2 & -6 & 7 \end{pmatrix}$ calcular M_{23} y M_{31}.

Solución:
El menor-23 se calcula con el determinante que se forma suprimiendo en A la segunda fila y la tercera columna: $M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -18 - 16 = -34$.

El menor-31 se calcula con el determinante que se obtiene suprimiendo en A la fila 3 y la columna 1: $M_{31} = \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-35) = 35$.

Definición: Se llama COFACTOR-ij de un determinante al menor-ij multiplicado por 1 en las posiciones donde i+j es par, y por –1 en las posiciones donde i+j es impar.
Se denota: $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

En la matriz $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ las posiciones pares son: b_{11}, b_{13} ,b_{31}, b_{22} ,b_{33} y

las posiciones impares son: b_{12}, b_{32} ,b_{21}, b_{23}.

Ejemplos:

1. Si $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 9 \\ 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ calcular los cofactores C_{12} , C_{31} y C_{21} .

Solución: Se aplica la definición para cada cofactor:

$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(4 + 18) = -22$

$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -5 & 9 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = (1)(15 - 0) = 15$

$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -5 & 9 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(-20 - 9) = 29.$

Si se calculan todos los cofactores de B, con ellos se forma una matriz asociada a B llamada **matriz de cofactores** y se denota: Cof(B).

2. Si $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 9 \\ 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ hallar la matriz de cofactores de B.

Solución: Se calculan todos los cofactores y se forma la matriz :

$$\text{Cof(B)} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -22 & 1 \\ 29 & -46 & -32 \\ 15 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

Veamos ahora la relación que existe entre un determinante y cada uno de sus cofactores.

El determinante de una matriz A se obtiene multiplicando cualquier fila o columna de A, por la misma fila o columna de la matriz de cofactores asociada a ella:

Si se elige la primera fila de A se tiene: $|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$.

Si es con la tercera columna de A se tiene: $|A| = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33}$.

3. Si $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 9 \\ 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, calcular $|B|$ de varias formas:

Solución:

Por la primera fila: $|B| = 2\cdot 3 + (-5)(-22) + 9\cdot 1 = 6 + 110 + 9 = 125$.

Por la segunda columna: $|B| = (-5)(-22) + 0\cdot(-46) + 1\cdot 15 = 110 + 0 + 15 = 125$.

Por la definición del determinante de orden 3:

$$|B| = 2\cdot 0\cdot 4 + 1\cdot 1\cdot 9 + (-5)(-3)\cdot 6 - (9\cdot 0\cdot 6 + (-5)\cdot 1\cdot 4 + (-3)\cdot 1\cdot 2).$$

$$= (0 + 9 + 90) - (0 - 20 - 6) = 99 + 26 = 125.$$

Definición: Se define la EXPANSIÓN de un determinante de orden n por una fila (o columna), como la suma de los productos de cada elemento de esa fila (o columna) por su correspondiente cofactor. El resultado de la expansión es el valor del determinante.

Si $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ entonces la EXPANSIÓN POR LA FILA 1 es:

$\det(A) = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} - a_{14}A_{14}$.

Donde A_{11} es el menor-11 de A .

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$ se eliminó la fila-1 y la columna-1 en det(A).

A_{12} es el menor-12 de A:

$$A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$ se eliminó la fila-1 y la columna-2 en det(A).

En forma análoga se calculan A_{13} (el menor-13) y A_{14} (el menor-14) entonces:

$$\det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Definición: Se define el DETERMINANTE de A_n POR LOS COFACTORES de la Fila-i como:

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{12} + a_{i3}C_{i3} + \dots + a_{in}C_{in} ,$$

Los cofactores son: $C_{i1} = (-1)^{i+1} M_{i1}$; $C_{i2} = (-1)^{i+2} M_{i2}$; . . . , $C_{in} = (-1)^{i+n} M_{in}$.

Nota: Utilizando cofactores, el cálculo del determinante se hace reduciendo su orden progresivamente:

Para calcular un determinante de orden 4, se calculan 4 determinantes de orden 3; para calcular un determinante de orden 5, se calculan 5 determinantes de orden 4, pero a su vez, por cada uno de estos, se calculan 4 determinantes de orden 3, es decir, se calculan en total 20 determinantes de orden 3.

Ejemplo: Calcular $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -3 \\ -1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

Solución:
Como no se ha definido el cálculo directo para un determinante de orden 4, se aplica la definición por cofactores, haciendo la expansión por cualquier fila o cualquier columna. Se observa además que tanto las filas 2 y 4, como las columnas 1 y 4, tienen dos ceros cada una, por lo tanto, se puede hacer la expansión por cualquiera de ellas.

- Haciendo la expansión por la Columna 1 se tiene:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -3 \\ -1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2.C_{11} + 0.C_{21} + (-1).C_{31} + 0.C_{41} = 2.C_{11} - C_{31} ,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -3 \\ -1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(10-36+6-18) - (-3-27) = -76 + 30 = -46,$$

- Haciendo la expansión por la Fila 4 se tiene:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -3 \\ -1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 3. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1(20+3+12) - 3(12-9+24) = -46$$

El valor del determinante es -46.

Nota: Como puede comprobarse, el resultado del determinante no depende de la fila o la columna que se elige para la expansión. Por tanto. se escoge la que tenga mas ceros para ahorrar cálculos.

De los casos mencionados, se deduce que en la medida que aumenta el orden del determinante, el cálculo se hace mas dispendioso, razón por la cual lo más práctico es el uso de las propiedades de los determinantes.

Ejercicios propuestos:

1. Evalue los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 10 & 7 & 9 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & b \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} y+3 & 5 \\ 2y & -4 \end{vmatrix}$

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 9 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

a) Determine λ tal que $\det(\lambda . I_2 - A) = 0$.
b) Expres e $\det(\lambda\, I_3 - B)$ en términos de λ.

3. Evalue el determinante de $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ por cofactores de :

a) La tercera fila . b) La segunda columna. c) Directamente.

4. Encuentre los valores de x para los cuales: $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ -2 & x+2 & -1 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

3.1.2. Propiedades de los determinantes

Las propiedades se utilizan particularmente para calcular determinantes de orden mayor a 3.

Se enuncian las propiedades y se hace su justificación con determinantes de orden dos o tres, cuando se estime pertinente.

1. Si en un determinante se intercambian dos filas (o columnas), este cambia de signo.

Justificación:

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$ y $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = c.b - a.d = -(ad - bc)$ entonces $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Se intercambiaron las filas 1 y 2.

2. Si un determinante tiene dos filas (o columnas) iguales, su valor es cero.

Justificación:

Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = m$, entonces $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = -m$, intercambiando las filas 1 y 2

pero los dos determinantes son iguales, luego $m = -m \Rightarrow 2.m = 0 \Rightarrow m = 0$

Por tanto: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$.

3. Si una fila (o columna) de un determinante se multiplica por una constante k, el determinante queda multiplicado por k.

Justificación:

Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = m$, entonces $m = a.C_{11} + b.C_{12} + c.C_{13}$ (expansión por la fila 1).

Si calculamos $\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ con la expansión por la fila-1, se tiene:

$$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = ka.C_{11} + kb.C_{12} + kc.C_{13} = k.(a.C_{11} + b.C_{12} + c.C_{13}) = km\ .$$

Entonces $\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$.

4. El determinante de una matriz A es igual al determinante de su transpuesta.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, entonces $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$.

Justificación: (se deja como ejercicio)

5. El determinante de una matriz triangular (superior o inferior), es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.

Justificación: utilizando la definición del determinante de orden 3:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = (adf + be.0 + 0.0.c) - (cd.0 + b.0.f + e.0.a) = edf\ .$$

6. El determinante de un producto de matrices, es igual al producto de los determinantes de las matrices.

Justificación:

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, entonces: $\det(AB) = \begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix}$,

Pero det(AB) = (ae + bg).(cf + dh) – (af + bh).(ce + dg) .

= aecf + aedh + bgcf + bgdh – afce – afdg –bhce – bhdg .
= aedh + bgcf – afdg – bhce .
= ad.(eh – fg) – bc.(eh – fg) .
= (ad – bc).(eh – fg) .
= det(A).det(B).

Verificación:

Si $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, entonces: $AB = \begin{pmatrix} 51 & 22 & 49 \\ 24 & 18 & -14 \\ 26 & 13 & 14 \end{pmatrix}$

det(A) = $7\cdot4\cdot1+(-2)\cdot3\cdot0+1\cdot5\cdot2-2\cdot4\cdot0-(-2)\cdot1\cdot1-3\cdot5\cdot7$=28+10+2–105=–65 .

det(B) = 0 + 56 + 0 – 42 – 0 – 0 = 14 .

det(A.B) = 12852 + 15288 – 8008 – 22932 – 7392 + 9282 = –910.

Por tanto, det(A).det(B) = –65.14 = –910 = det(A.B) .

7. Si los elementos de una fila (o columna) de un determinante se multiplican por los de la respectiva fila (o columna) en su matriz de cofactores, se obtiene el valor del determinante. Pero si se multiplican por los de otra fila (o columna), el resultado es cero.

Justificación:

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz de cofactores es: cof (A) = $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ entonces:

det(A) = $ad + b(-c) = c(-b) + ad = ad - cb$

Verificación:

Si T = $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, entonces: cof (T) = $\begin{pmatrix} -9 & -1 & 3 \\ -21 & 11 & 7 \\ 38 & -18 & -26 \end{pmatrix}$ y efectuando:

a) Segunda fila de T por segunda fila de cof (T):

$2\cdot(-21)+(-3)\cdot 11+5\cdot 7=-40=$ det(T).

b) Tercera columna de T por tercera columna de cof (T):

$1\cdot(3)+5\cdot 7+3\cdot(-26)=3+35-78=-40=$ det(T).

a) Segunda fila de T por tercera fila de cof (T):

$2\cdot 38+(-3)(-18)+5\cdot(-26)=76+54-130=0$.

d) Primera columna de T por segunda columna de cof (T):

4.(–1) + 2.11 + 1.(–18) = –4 + 22 – 18 = 0.

8. Si los elementos de una fila (o columna) de un determinante se descomponen en sumas con el mismo número de sumandos, el determinante también se descompone en la misma cantidad de sumandos.

Justificación:

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$, donde $a=a_1+a_2$; $b=b_1+b_2$; $c=c_1+c_2$.

$\begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ c & d \end{vmatrix}$, porque $(a+e)d-c(b+f)=(ad-cb)+(ed-cf)$.

Verificación:

$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+4 & 3+4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow$ –18 = (–10) + (–8).

9. Si a una fila (o columna) de un determinante se le suma k veces otra fila (o columna), el valor del determinante no cambia.

Justificación: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{vmatrix}$, porque

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{vmatrix} = a(d+kb)-(c+ka)b = ad+akb-cb-kab = ad-cb = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Si $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

la matriz A con la operación $F_3 + kF_2$ es equivalente a la matriz B, entonces:

$|B| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+kd & h+ke & i+kf \end{vmatrix}$, y al calcular det(B) por la tercera fila se tiene:

$|B| = (g+kd).C_{31} + (h+ke).C_{32} + (i+kf).C_{33}$.

$|B| = g.C_{31} + h.C_{32} + i.C_{33} + k.(d.C_{31} + e.C_{32} + f.C_{33})$ (propiedad 7) .

$|B| = |A| + k.0 = |A|$, luego $|B| = |A|$.

Ejemplos:

1. Calcular $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

Solución: Evaluando el determinante por la primera columna tenemos:

$$0.C_{11} + 0.C_{21} + 0.C_{31} = 0$$

2. Calcular $\begin{vmatrix} 0,5 & 0,3 \\ -0,2 & 0,9 \end{vmatrix}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 0,5 & 0,3 \\ -0,2 & 0,9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5/10 & 3/10 \\ -2/10 & 9/10 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{100}(5\cdot 9 - 3\cdot(-2)) = \frac{51}{100} = 0,51$$

De las filas 1 y 2 se tomó el factor 1/10.

3. Reducir de orden y calcular $\begin{vmatrix} 2 & -8 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 7 & 1 \\ -5 & -2 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Solución: Efectuamos sobre el determinante las siguientes operaciones:

$F_1 - 6F_2$ y $F_4 - 3F_2$ se obtiene el determinante:

$\begin{vmatrix} 2 & -50 & -38 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 1 \\ -5 & -2 & 1 & 0 \\ 9 & -19 & -20 & 0 \end{vmatrix}$, el cual se evalúa por la cuarta columna.

$\begin{vmatrix} 2 & -50 & -38 \\ -5 & -2 & 1 \\ 9 & -19 & -20 \end{vmatrix}$ Este determinante se reduce a orden 2 con las operaciones:

$C_2 + 2 \cdot C_3$ y $C_1 + 5 \cdot C_3$, se tiene:

$\begin{vmatrix} -188 & -126 & -30 \\ 0 & 0 & 1 \\ -91 & -59 & -20 \end{vmatrix}$ = (-1) $\begin{vmatrix} -188 & -126 \\ -91 & -59 \end{vmatrix}$ = 374

4. S i $|A| = 5$ y A es matriz de orden 3, determinar: a) $|2A|$ b) $|A^3|$

Solución:

a) Por cada fila de A el determinante se multiplica por 2, entonces:

$$|2A| = 2^3 \cdot |A| = 8 \cdot 5 = 40.$$

b) $|A^3|$ = $|A \cdot A \cdot A| = |A| \cdot |A| \cdot |A|$ = 5^3 = 125.

5. Mostrar que $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$ aplicando las propiedades.

Solución: Se reduce el determinante a orden 2

con las operaciones $F_2 - 1F_1$ y $F_3 - 1F_1$ con lo cual se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c+a-b-a) = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Entonces $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$

Ejercicios propuestos:

1. Evalue : a) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

2. Si $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7$ Aplique las propiedades para obtener el valor de:

a) $\begin{vmatrix} 2a & 3c & b \\ 2d & 3f & e \\ 2g & 3i & h \end{vmatrix}$ b) $|A^3|$ c) $|4A|$ d) $|A| = \begin{vmatrix} a & g & 3d \\ b & h & 3e \\ c & i & 3f \end{vmatrix}$

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ verifique :

a) $|AB| = |A|\ |B|$.   b) $|A^T| = |A|$.   c) $|2B| = 2^3\ |B|$.

4. Utilizando propiedades demostrar que: $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1)^2(x+2)$.

3.2. APLICACIONES

En esta sección se estudian dos de las aplicaciones más frecuentes de los determinantes: la solución de sistemas de ecuaciones lineales con solución única y el cálculo de la matriz inversa.

El proceso de solución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el uso de determinantes, es conocido como Regla de Cramer y se aplica sólo a sistemas con solución única. El proceso para hallar la inversa de una matriz no singular, se basa en el cálculo de los cofactores de la matriz.

3.2.1. Regla de Cramer

Esta es una de las técnicas más conocidas para la solución de sistemas de ecuaciones lineales con solución única.

Un sistema de n ecuaciones lineales con n variables tiene solución única si el determinante de la matriz de coeficientes es diferente de cero, en tal caso puede ser resuelto mediante el proceso conocido como REGLA DE CRAMER.

A continuación se describe el proceso generalizado para resolver un S. E. L. con solución única, aplicando la regla de Cramer.

Algoritmo: (A es la matriz de coeficientes).

(1) Calcular el determinante de A. Si $|A| \neq 0$ se continúa con el proceso.

(2) Calcular $|A_i|$ para cada variable x_i .

$|A_i|$ se forma cambiando en $|A|$ la columna de los coeficientes de x_i , por la de los términos independientes.

(3) Calcular cada variable x_i por medio del cociente $x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$.

Nota: Si $|A|$ = 0 este método no se puede aplicar y se utiliza alguno de los métodos estudiados en la unidad 2 (reducción de Gauss-Jordan o eliminación de Gauss).

Consideremos el sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$ entonces:

$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ es el determinante de la matriz de coeficientes.

$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ en $|A|$ se cambió la columna-1 por los términos independientes.

$|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$ en $|A|$ se cambió la columna-2 por los términos independientes.

$|A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$ en $|A|$ se cambió la columna-3 por los términos independientes.

Los valores de las variables x_1, x_2 y x_3 se calculan con los cocientes:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \quad ; \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \quad ; \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$$

Ejemplos

1. Utilizando la regla de Cramer resolver el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 3x - 5y = 7 \end{cases}$

Solución:

Se calculan los determinantes $|A|$, $|A_x|$ y $|A_y|$.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=-19 \; ; \; |A_x| = \begin{vmatrix} 15 & 3 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -96 \; ; \; |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 15 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -31 \; .$$

y se aplican las definiciones.

Entonces: $x=\dfrac{-96}{-19}=\dfrac{96}{19}$ y $y=\dfrac{-31}{-19}=\dfrac{31}{19}$.

La solución del sistema es: $(x, y)=\left(\dfrac{96}{19}, \dfrac{31}{19}\right)$.

2. Utilizando la regla de Cramer hallar el valor de la variable y en $\begin{cases} 3x-4y+5z=0 \\ -x-2y+7z=2 \\ x+y \qquad\quad =7 \end{cases}$

Solución: Se aplica directamente la definición para la variable y :

$$y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 7 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -1 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{-192}{-44}=\frac{48}{11}$$

3. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ap+bq+cr=10 \\ ep+eq+fr=20 \\ gp+hq+ir=30 \end{cases}$

, donde p, q y r son las variables, escribir la expresión para obtener la variable q.

Solución: Aplicando la regla de Cramer, como q es la segunda variable del sistema

$$q = \frac{|A_q|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a & 10 & c \\ d & 20 & f \\ g & 30 & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

El proceso descrito anteriormente se generaliza para sistemas de n ecuaciones con n variables, siempre que el determinante de la matriz de coeficientes (A), sea diferente de cero.

4. Hallar la solución del sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+2y+z \quad\; =2 \\ 2x \quad -2z+w=6 \\ 4y+3z+2w=-1 \\ -x+6y-z-w=2 \end{cases}$

Solución: Primero se calcula el determinante de la matriz de coeficientes.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, entonces:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & -1 & -1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} -4 & -4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 12 & 11 & 2 \\ 4 & -4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 12 & 11 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 12.(-4) - 11.4 = -48 - 44 = -92.$$

(1) La columna 1 multiplicada por (-2) se sumó a la columna2 .
multiplicada por (-1) se sumó a la columna 3.

(2) Se hizo la expansión por la fila 1.

3) La columna 3 multiplicada por 4 se sumó a la columna 1 y a la columna 2.

(4) Se hizo la expansión por la fila 1.

Como $|A| \neq 0$ se calculan los determinantes para cada una de las variables:

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 4 & -2 & 1 \\ -7 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 4 & 1 \\ -7 & -2 & 2 \\ 4 & 8 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -27 & -10 & 2 \\ 14 & 12 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -27 & -10 \\ 14 & 12 \end{vmatrix} = -324 + 140 = -184.$$

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -5 & 11 & 2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & 11 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 20 - 66 = -46.$$

$$\det(A_z) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 8 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 8 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 12 & -5 & 2 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 12 & -5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 72 + 20 = 92.$$

$$\det(A_w) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 7 & 2 \\ 2 & 24 & 16 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 14 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 7 \\ 2 & 24 & 16 \\ -1 & 14 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 7 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 24 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 24 & 12 \end{vmatrix} = 48 - 48 = 0.$$

Ahora se calcula cada una de las variables aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-184}{-92} = 2 \ ; \quad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{-46}{-92} = \frac{1}{2} \ .$$

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{92}{-92} = -1 \ ; \quad w = \frac{\det(A_w)}{\det(A)} = \frac{0}{-92} = 0.$$

La solución del sistema de ecuaciones es: $x = 2$; $y = ½$; $z = -1$; $w = 0$.

Nota: Para el cálculo de cada uno de los determinantes, se combinó la aplicación de las propiedades con la expansión por cofactores para ir reduciendo el orden de los determinantes hasta llegar al determinante de orden 2, cuyo cálculo es inmediato.

3.2.2. Matriz inversa

Un requisito para hablar de "matriz inversa" de una matriz A, es que esta sea cuadrada. Sin embargo, la condición es necesaria pero no suficiente.

Definición: Si A es una matriz cuadrada de orden n, se dice que A es INVERTIBLE si existe una matriz B llamada INVERSA DE A tal que $A.B = I_n = B.A$.

Se denota: $B = A^{-1}$ entonces $A.A^{-1} = I_n = A^{-1}.A$.

Nota: Se habla de "la matriz Inversa" porque en caso de existir es única.
Como no todas las matrices cuadradas tienen inversa, vamos a establecer la condición que garantiza la existencia de A^{-1}.

Teorema: Si la matriz inversa de A existe, entonces: $\det(A) \neq 0$.

Demostración:

Como A es invertible, existe A^{-1} entonces $A.A^{-1} = I_n$.
Calculando el determinante a los 2 lados de la igualdad se tiene: $\det(A.A^{-1}) = \det(I_n)$.

Como I_n es triangular, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal, es decir $\det(I_n) = 1$ y en consecuencia, $\det(A)$ y $\det(A^{-1})$ no son cero.

La afirmación contrarrecíproca de este teorema resulta muy útil:

Teorema: Si $|A| = 0$,entonces, la matriz inversa de A no existe.

Veremos ahora otro método para hallar la inversa de una matriz no-singular, conocido como método de la "matriz adjunta" que a continuación se describe:

Definición: Se llama MATRIZ ADJUNTA de A a la matriz de cofactores de la matriz transpuesta.

Se denota adj (A) = cof (A^T)

Ejemplo:

Encuentre la matriz adjunta de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Solución:

Hallamos la matriz transpuesta $A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Calculamos los cofactores de A^T: $C_{11} = (-1)^2\,[5\cdot(-3)-2\cdot 0] = -15$.

$C_{12} = (-1)^3\,[(-1)(-3) - 0\cdot 3] = -3$. $C_{13} = (-1)^4\,[(-1)\cdot 2-5\cdot 3] = -17$.

$C_{21} = (-1)^3\,[(-2)(-3) - 1\cdot 2] = -4$. $C_{22} = (-1)^4\,[0\cdot(-3)-1\cdot 3] = -3$.

$C_{23} = (-1)^5\,[0\cdot 2 - (-2)\cdot 3] = -6$. $C_{31} = (-1)^4\,[(-2)\cdot 0 - 1\cdot 5] = -5$.

$C_{32} = (-1)^5\,[0\cdot 0 -(-1)\cdot 1] = -1$. $C_{33} = (-1)^6\,[0\cdot 5-(-2)(-1)] = -2$.

Ahora se puede formar la matriz adjunta de A: $\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -15 & -3 & -17 \\ -4 & -3 & -6 \\ -5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Teorema: Si A es una matriz invertible, entonces $A.\,\text{adj}(A) = \det(A)\, I_n$.

Demostración:

Se hace para una matriz de orden 3. pero el proceso se puede generalizar para matrices cuadradas de cualquier orden n.

Sean $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ y $\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$.

Por definición, la transpuesta de cof(A) es la matriz adjunta de A, entonces:

$$\text{adj}\,(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A \cdot \text{adj}\,(A) = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En la diagonal principal, se multiplica cada fila de A por sus respectivo cofactor, en estos casos, el resultado es $|A|$ (propiedad 7), mientras que en las demás posiciones se multiplicó una fila por los cofactores de otra, y en estos casos el resultado es cero. Por tanto: A. adj(A) = det (A) $I_{n.}$

Si el determinante de A es diferente de cero, podemos multiplicar los dos lados de la igualdad por $\frac{1}{|A|}$ y se tiene $A \cdot [\ \frac{1}{|A|}$ Adj(A)] = $I_{n.}$

Definición: Si A es matriz invertible, se define la inversa de A como:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ \text{adj}(A).$$

Algoritmo: (para hallar la matriz inversa de A):

(1) Calcular el determinante de A.
(2) Escribir la matriz transpuesta de A.
(3) Hallar los cofactores de A^T.
(4) Escribir la matriz adjunta de A.
(5) Multiplicar la matriz adjunta por el escalar $\frac{1}{|A|}$ y escribir la matriz inversa.

Ejemplos

1. Hallar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$ por medio de la matriz adjunta.

Solución:

Se calcula det (A) = 3 · 7 =4 · (=5) = 21 + 20 = 41.

Se escribe la matriz transpuesta $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Se calculan los cofactores de A^T : $C_{11} = 7$; $C_{12} = -4$; $C_{21} = 5$; $C_{22} = 3$.

Se escribe la matriz adjunta adj (A) = $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Se multiplica la matriz adjunta por $\frac{1}{|A|}$ y se escribe A^{-1} entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{41}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/41 & -4/41 \\ 5/41 & 3/41 \end{pmatrix}$$ es la matriz inversa de A .

Nota: Es conveniente verificar que $A \cdot A^{-1} = I_2$.

2. Resolver el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ -5x + 7y = 5 \end{cases}$

Solución: Resolver el sistema de ecuaciones se reduce a hallar la matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

La matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$ es la misma del ejercicio anterior en el cual se obtuvo $A^{-1} = \frac{1}{41}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Si se plantea la ecuación matricial del sistema de ecuaciones $X = A^{-1} \cdot B$, $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Entonces: $X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{41}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43/41 \\ 60/41 \end{pmatrix}$.

La solución del sistema de ecuaciones es: $x = \frac{43}{41}$ y $y = \frac{60}{41}$.

se puede comprobar remplazando estos valores en cada una de las ecuaciones del sistema para verificar que se satisface cada una de las igualdades.

3. Encontrar la matriz inversa de: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ por medio de la matriz adjunta.

Solución: Como $|B| = =10$ se sabe que B^{-1} , existe y se hallan las matrices:

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \text{adj}(B) = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & -7 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto: $B^{-1} = \begin{pmatrix} 4/5 & -1/5 & -4/5 \\ -1/5 & -1/5 & 7/10 \\ 1/5 & 1/5 & -1/5 \end{pmatrix}$.

Es conveniente verificar que: $B \cdot B^{-1} = I_3$.

4. Hallar si existe, la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y de $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución:

Calculamos el determinante de cada una de las matrices:

det (A) = $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ = (12 – 24 + 6) – (–24 + 12 + 6) = –6 + 6 = 0 .

Entonces A^{-1} no existe.

det (B) = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ = (12 + 4 + 0) – (0 + 6 + 1) = 16 – 7 = 9 .

Entonces B^{-1} existe y continuamos con el proceso.

Matriz transpuesta de B: $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Se calculan todos los cofactores de B^T:

$C_{11} = 4 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 11 = 11.$ $\quad C_{21} = -(1 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = -1.$ $\quad C_{31} = 1 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = -7.$

$C_{12} = -(2 \cdot 3 - 0 \cdot 1) = -6.$ $\quad C_{22} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 0 = 3.$ $\quad C_{32} = -(1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) = 3.$

$C_{13} = 2 \cdot 1 - 0 \cdot 4 = 2$. $C_{23} = -(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) = -1$. $C_{33} = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 2$.

La matriz adjunta de B: $\text{adj}(B) = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

La matriz inversa de B: $B^{-1} = \begin{pmatrix} 11/9 & -6/9 & 2/9 \\ -1/9 & 3/9 & -1/9 \\ -7/9 & 3/9 & 2/9 \end{pmatrix}$.

Nota: Para el caso de la matriz A, como el determinante es igual a cero se concluye que no existe la matriz inversa y el ejercicio queda resuelto.

Para el caso de la matriz B como el determinante es diferente de cero, se concluye que la matriz inversa existe y se continúa con el proceso.

La matriz inversa se forma dividiendo cada uno de los elementos de la matriz adjunta por el determinante. Se puede comprobar que el resultado es correcto multiplicando B y B^{-1}, y el resultado debe ser la matriz idéntica de orden 3 (I_3) .

Propiedades de la matriz inversa

1. Si A es una matriz invertible entonces $(A^{-1})^{-1} = A$.

2. Si $|A| = k \neq 0$ entonces $|A^{-1}| = \frac{1}{|k|}$.

3. Si A es invertible entonces $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

4. Si A y B son matrices invertibles su producto también lo es y $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

Ejemplos:

Verificar cada una de las propiedades enunciadas con las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Verificación:

Propiedad 1: $(A^{-1})^{-1} = A$

Si $A=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 9 & 10\end{pmatrix}$ entonces $A^{-1}=\begin{pmatrix}2/17 & 1/17\\ -9/85 & 4/85\end{pmatrix}$ y

$(A^{-1})^{-1}=\begin{pmatrix}2/17 & 1/17\\ -9/85 & 4/85\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -5\\ 9 & 10\end{pmatrix}=A.$

Propiedad 2: Si $|A|=k \Rightarrow |A^{-1}|=\dfrac{1}{|k|}$ con $k\neq 0$.

$|A| = 4\cdot 10-9\cdot(-5)=85.$

$$|A^{-1}|=\begin{vmatrix}2/17 & 1/17\\ -9/85 & 4/85\end{vmatrix}=\frac{2}{17}\cdot\frac{4}{85}-\left(-\frac{9}{85}\right)\cdot\frac{1}{17}=\frac{8+9}{17\cdot 85}=\frac{17}{17\cdot 85}=\frac{1}{85}.$$

Propiedad 3: $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

$A^T=\begin{pmatrix}4 & 9\\ -5 & 10\end{pmatrix}$ y su inversa es $(A^T)^{-1}=\begin{pmatrix}2/17 & -9/85\\ 1/17 & 4/85\end{pmatrix}$.

$A^{-1}=\begin{pmatrix}2/17 & 1/17\\ -9/85 & 4/85\end{pmatrix}$ y su transpuesta es $(A^{-1})^T=\begin{pmatrix}2/17 & -9/85\\ 1/17 & 4/85\end{pmatrix}$.

Propiedad 4: $(A.B)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$

$A.B=\begin{pmatrix}18 & -24\\ 83 & 31\end{pmatrix}$, entonces: $(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{31}{2550} & \frac{4}{425}\\ \frac{-83}{2550} & \frac{3}{425}\end{pmatrix}$.

Además $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{17} & \frac{1}{17}\\ \frac{-9}{85} & \frac{4}{85}\end{pmatrix}$ y $B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{15} & \frac{1}{30}\\ \frac{-1}{15} & \frac{7}{30}\end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1}.A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{31}{2550} & \frac{4}{425}\\ \frac{-83}{2550} & \frac{3}{425}\end{pmatrix}$.

Teorema: (Resumen)

Si A es matriz cuadrada de orden n, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) A es invertible.
(2) La única solución del sistema homogéneo AX = O es la trivial.
(3) El determinante de A es diferente de cero.
(4) El sistema de ecuaciones lineales AX = B tiene solución única.
(5) A es equivalente por filas a la matriz I_n.

Ejercicios propuestos:

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, verifique $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$.

2. Encuentre las matrices inversas de $X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y verifique que

se cumplen las siguientes propiedades: a) $(X.Y)^{-1} = Y^{-1}.X^{-1}$. b) $(X^T)^{-1} = (X^{-1})^T$.

3. Resolver aplicando la regla de Cramer los siguientes S. E. L.:

a) $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 2x + y - 3z = 8 \\ x - 2y + 3z = -5 \end{cases}$. b) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = 3 \\ x + 4y \quad = 0 \end{cases}$. c) $\begin{cases} x + y - 3z = -7 \\ x + y \quad = 4 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$.

4. Si A X = B donde A = $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 15 \end{pmatrix}$

Halle X resolviendo la ecuación.

5. Para la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -4 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ calcule :

a) El menor de 0 . b) El cofactor de 7 . c) $M_{24.}$ d) C_{42} .

6. Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -x \\ 1 & x & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 30$.

7. Para que valores de α el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x_1 + \alpha x_2 + 17x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 0 \\ x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ ¿tiene solución única?

RESUMEN

Un **determinante** es un número real asociado a una matriz cuadrada A, denotado por det (A) = $|A|$. El cálculo del determinante para las matrices de orden 2 y 3 es directo, pero para matrices de orden superior se utilizan las propiedades.

El **menor–ij** (M_{ij}) del determinante A se obtiene eliminando en $|A|$ la i-ésima fila y la j-ésima columna, también es un número. El **cofactor–ij** de $|A|$ es el menor-ij multiplicado por 1 cuando i+j es un número par y por (-1) cuando i+j es impar. Se denota por $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Un determinante de cualquier orden puede ser calculado haciendo la expansión por cualquier fila (o columna), que consiste en multiplicar cada elemento de esa fila por el correspondiente cofactor y sumar los resultados: $|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$.

Otra forma de calcular un determinante es aplicar las propiedades para obtener una forma triangular, pues en tal caso el valor de $|A|$ es el producto de los elementos de la diagonal principal (propiedad 5). El proceso de llevar el determinante a la forma triangular se puede realizar, intercambiando filas y sumando a una fila, otra fila multiplicada por una constante (propiedades 1 y 9).

Los determinantes se utilizan para hallar la matriz inversa de A si existe.

Con todos los cofactores de A se forma la **matriz de cofactores** de A, cof (A).

Con los cofactores de la matriz transpuesta (A^T), se forma la **matriz adjunta** de A que se denota por adj (A) = cof (A^T).

La **matriz inversa** de A se forma multiplicando escalarmente, la matriz adjunta por el inverso del determinante: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}$ adj(A). Ahora se puede comprender por qué una condición para que exista la matriz inversa, es que su determinante no sea cero.

Los determinantes permiten resolver S.E.L. con solución única utilizando la **regla de Cramer**, por medio de la cual, cada variables es igual al cociente de 2 determinantes, el de la matriz de coeficientes (A), y el de la matriz que se forma cambiando en A la columna de coeficientes de la variable que se va a calcular, por los términos independientes (A_i).

Así: $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$ para cada variable x_i del sistema de ecuaciones.

Teorema: (Resumen)

Si A es matriz cuadrada de orden n, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) A es invertible.
(2) La única solución del sistema homogéneo AX = O es la trivial.
(3) El determinante de A es diferente de cero.
(4) El sistema de ecuaciones lineales AX = B tiene solución única.
(5) A es equivalente por filas a la matriz I_n.

GLOSARIO

Un **determinante** es un número real asociado a una matriz cuadrada.

El **menor–ij** de $|A|$ se forma eliminando en $|A|$ la fila i y la columna j.

El **cofactor–ij** de $|A|$ es el menor-ij multiplicado por $(-1)^{i+j}$.

La **expansión** de $|A|$ por una fila es, la suma de los elementos de esa fila, multiplicados por su correspondiente cofactor.

La Matriz de cofactores de A es la matriz que se forma con los cofactores de A.

La Matriz adjunta de A se forma multiplicando escalarmente por $|A|$, a la matriz de cofactores de A^T.

La Regla de Cramer es un método de solución para S.E.L. con solución única.

AUTOEVALUACIÓN

En cada caso seleccione la respuesta correcta:

1. Los valores enteros de α para los cuales $\begin{vmatrix} \alpha+2 & -1 & 3 \\ \alpha & \alpha-1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha+4 \end{vmatrix} = 0$ son:

a) –2 , 1 y -4. **b)** solo -4 . **c)** 0 y -2. **d)** 2, -1 y 4.

2. Los valores de x para los cuales $\begin{vmatrix} 5-x & 7 & -10 \\ 0 & x & 4 \\ 0 & 0 & x+3 \end{vmatrix} \neq 0$ son:

a) 5 , 0 y -3. **b)** ninguno. **c)** 5 , -3 y -4 . **d)** todo real diferente de 0, 5 o –3.

3. El determinante igual a cero para todo a y b diferentes de cero es:

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$. **b)** $\begin{vmatrix} a & -b \\ -a & b \end{vmatrix}$. **c)** $\begin{vmatrix} a & a \\ -b & b \end{vmatrix}$. **d)** $\begin{vmatrix} a & b \\ -a & b \end{vmatrix}$.

4. El cofactor-33 de $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -2 & 3 & b \\ -9 & c & 0 \end{pmatrix}$ es:

a) 0. **b)** 3a – 2 . **c)** 3a + 2 . **d)** –3a + 2 .

5. Si A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ entonces $|A|$ es igual a:

a) –12 . **b)** 6 . **c)** 12 . **d)** 30.

6. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, los valores de λ para los cuales det $(\lambda I_2 - A)$ = 0 son:

a) 2 y 3 . **b)** ninguno. **c)** –7 y 2 . **d)** 7 y -2.

Decida si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera (V) o falsa (F).

7. La matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ no es invertible.

8. Si det (A) = 0 el sistema lineal homogéneo A X = O tiene soluciones diferentes a la trivial.

9. La regla de Cramer es un método para resolver cualquier sistema de ecuaciones Lineales, con igual cantidad de ecuaciones que de variables.

10. Al resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 4x+5y=2 \\ -x-2y=1 \end{cases}$ utilizando la regla de Cramer

la variable y es igual a: $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}$.

11. Si $B=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$,la matriz adj (B) es: $\begin{pmatrix} -15 & 3 & -1 \\ 35 & -7 & -14 \\ -19 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.

12. Si una matriz es equivalente a la idéntica entonces es invertible.

RETROALIMENTACIÓN

Respuestas a los ejercicios propuestos.

Sección 3.1 (página 106): **1.** a) 237 . b) 0. c) 29 – 2a – 15b. d) –14y – 12.

2. a) 7 y -2 . b) $\lambda^3-20\lambda^2+114\lambda-237$. **3.** c) 0 – 12 + 0 – 7 + 0 – 30 = -49.

3. a) $1.\begin{vmatrix} -4 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}-5.\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=-19-30=-49.$ b) $4.\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}+1.\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}-5.\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=-49.$

4. –1 , 1 y –2.

Sección 3.1.2 (página 113): **1.** a) –1113. b) 0.

2. a) 2.3.(-1).7 = -42 . b) 7.7.7 = 343. c) 4.4.4.7 = 448. d) 3.(-1).7 = -21.

3. a) –17820 = (-270).(66). b) –270. c) –528 = 8.(66).

Sección 3.2.2 (página 127): **1.** $|A^{-1}|$ = –1/270 y $|A|$ = –270.

2. $X^{-1} = \begin{pmatrix} -19 & 3 & 11 \\ 3 & -1/2 & -3/2 \\ 4 & -1/2 & -5/2 \end{pmatrix}$; $Y^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$; $Y^{-1}X^{-1} = \begin{pmatrix} 49 & -31/4 & -111/4 \\ 3/2 & -1/4 & -3/4 \\ 51/2 & -4 & -29/2 \end{pmatrix}$

3. a) x = 1 , y = 0 , z = -2. b) no se puede resolver con regla de Cramer porque la solución no es única. c) x = 10/3 , y = 2/3 , z = 11/3.

4. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ **5.** a) 16 b) 27 c) 2 d) 11 **6.** 8 y -3 **7.** $\alpha = 2$

Solución Autoevaluación Unidad 3: (página 131).

1. La respuesta correcta es **b).** Haciendo la expansión del determinante por la tercera fila se tiene: $(\alpha+4)\begin{vmatrix} \alpha+2 & -1 \\ \alpha & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha+4)[(\alpha+2)(\alpha-1)+\alpha]$.

$$= (\alpha+4).(\alpha^2+2\alpha-2) = 0.$$

La solución del primer factor es –4, pero las del otro factor son $-1\pm\sqrt{3}$.

2. La respuesta correcta es **d)**. Como la matriz es triangular, el determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal. Entonces: (5 – x).x.(x + 3) = 0 si x = 5 o x = 0 o x = -3, por tanto, el determinante es diferente de cero si los valores de x son diferentes de 5, 0 y -3.

3. La respuesta correcta es **b).** $\begin{vmatrix} a & -b \\ -a & b \end{vmatrix}$ = $a.b$ – (-b).(-a) = $a.b$ – $a.b$ = 0. Los otros resultados son diferentes de cero: el primero es $a^2 + b^2$ siempre es positivo, los otros dos son 2ab y nunca va a ser cero porque ninguno de los factores es cero.

4. La respuesta correcta es **c).** El cofactor-33 se forma eliminando en el determinante de la matriz, tanto la fila 3, como la columna 3 y multiplicando el resultado por $(-1)^{3+3}$ entonces:

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} a & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1.(3a + 2) = 3a + 2.$$

5. La respuesta correcta es **c).** Si se intercambian las filas 3 y 4, se tiene una matriz triangular , y el determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal, pero cambia de signo por el cambio de filas. Entonces det (A) = (-1).2.3.(-2).1 = 12.

6. La respuesta correcta es **d).** $\lambda.I_2 - A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-2 & 5 \\ 4 & \lambda-3 \end{pmatrix}$.

Entonces: det $(\lambda.I_2 - A) = (\lambda-2).(\lambda-3) - 20 = 0$

$$\lambda^2 - 5.\lambda - 14 = 0 \Rightarrow \lambda = 7, \quad o \quad , \lambda = -2.$$

7. La afirmación es **falsa**. Como la matriz es triangular, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal: 2.3.(-3).(-2) =36, y por ser diferente de cero, la matriz es invertible.

8. La afirmación es **verdadera**. Si det (A) = 0, la matriz reducida tiene al menos una fila de ceros y el sistema de ecuaciones tendrá menos ecuaciones que variables, y un sistema homogéneo con menos ecuaciones que variables, tiene infinitas soluciones.

9. La afirmación es **falsa**. Si la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones no es invertible, su determinante es cero, y el sistema no tiene solución única. La regla de Cramer es un método para resolver sistemas de ecuaciones lineales con solución única.

10. La afirmación es **falsa**. Según l regla de Cramer $y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}$ = -2.

11. La afirmación es **falsa**. La matriz adjunta es la transpuesta de la matriz de cofactores, en este caso es: $\begin{pmatrix} -15 & 35 & -19 \\ 3 & -7 & -6 \\ -1 & -14 & 2 \end{pmatrix}$.

12. La afirmación es **verdadera**. Si una matriz es equivalente a la matriz idéntica su determinante es diferente de cero, y por consiguiente, es invertible (teorema de resumen pag. 115).

4. VECTORES

"El primero que encontró la fórmula de la palanca fue Arquímedes más de 2000 años atrás. Los romanos usaron sus inventos pero desdeñaron sus cálculos porque era un pueblo práctico que despreciaba la teoría. Sin embargo, para hacer avanzar la tecnología, es imprescindible e l estudio de la teoría".

INTRODUCCIÓN

Los vectores son elementos "supuestamente familiares" para cualquier persona que haya cursado un primer nivel de física general, donde se estudia la parte mecánica relacionada con los movimientos, que por ser desplazamientos, quedan muy bien representados por un vector, puesto que se debe especificar la longitud, la dirección y el sentido de dicho desplazamiento (los 3 elementos que caracterizan un vector).

Igualmente, las causas que originan un movimiento, como lo son la fuerza que se le aplica a un cuerpo o la velocidad constante o variable (aceleración) que se le imprime, también son apropiadamente representadas en forma "vectorial" , ya que para estos casos también se debe especificar magnitud (de la fuerza o la velocidad), dirección y sentido. Para el caso particular de la velocidad, recordemos que su magnitud se conoce como rapidez, y puede ser la misma en diferentes direcciones y sentidos (es un escalar).

En el estudio de los fenómenos electromagnéticos o la mecánica de fluidos, se recurre a los conceptos vectoriales del cálculo diferencial e integral, para la fundamentación de los modelos teóricos que mejor describen sus comportamientos reales.

Aunque su estudio se remonta al S. XVII para el desarrollo del cálculo infinitesimal por parte de G. Leibnitz, solo hasta el S. XIX H. Grassman y W. Hamilton definieron los vectores como los objetos con la representación geométrica que requería Leibnitz y que estudiaremos en esta unidad.

OBJETIVO GENERAL

Distinguir y aplicar las diferentes operaciones definidas con vectores en el plano ($\Re^2$) y en el espacio ($\Re^3$) y su generalización a $\Re^n$.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Definir y representar geométricamente vectores en $\Re^2$ y $\Re^3$.
- Efectuar operaciones con vectores en $\Re^2$ y $\Re^3$.
- Utilizar las propiedades de las operaciones vectoriales en los ejercicios de aplicación y en algunas demostraciones.
- Determinar paralelismo y ortogonalidad entre vectores.
- Calcular distancias, ángulos e intersecciones entre rectas y planos.
- Calcular áreas y volúmenes de paralelogramos y paralelepípedos.

CONTENIDO

4.1. Vectores en $\Re^2$.
4.1.1. Características de los vectores en $\Re^2$ (plano cartesiano):
Definiciones e interpretaciones geométricas.
Norma. Angulo direccional. Vector normado .
4.1.2. Operaciones con vectores en $\Re^2$:
Suma: definición, interpretación geométrica, propiedades.
Multiplicación escalar: definición, interpretación geométrica, propiedades.
Producto escalar: definición, interpretación geométrica, propiedades.
4.1.3. Aplicaciones de las operaciones en $\Re^2$:
Paralelismo y perpendicularidad.
Proyecciones ortogonales, trabajo.
Teorema del coseno.

4.2. Vectores en $\Re^3$
4.2.1. Características de los vectores en $\Re^3$ (espacio tridimensional):
Definiciones e interpretaciones geométricas.
Norma. Ángulos y cosenos directores. Vector normado.
4.2.2. Operaciones con vectores en $\Re^3$:

Suma, multiplicación escalar, producto escalar. Definición, propiedades.
Producto vectorial, producto mixto: definición, interpretación geométrica propiedades.

4.2.3. Aplicaciones de las operaciones en $\Re^3$:
Ecuaciones de rectas y planos en $\Re^3$.
Distancias e intersecciones entre rectas y planos.
Ángulos entre rectas y planos.
Momentos de una fuerza.
Áreas de paralelogramos y volúmenes de paralelepípedos.

4.3. Vectores en $\Re^n$.
4.3.1. Generalización de las definiciones y operaciones en $\Re^2$ y $\Re^3$.
4.3.2. Operaciones en $\Re^n$.

4.1. VECTORES EN $\Re^2$

Los desplazamientos entre dos puntos del plano determinan los objetos geométricos llamados vectores.

4.1.1. Características de los vectores en $\Re^2$

Dos puntos a y b del plano geométrico definen un segmento $\overline{ab}$. Este segmento puede ser "dirigido" en dos sentidos, de a hacia b o de b hacia a, y se indica con una sagita o flecha en el correspondiente sentido. (figura 4.1).

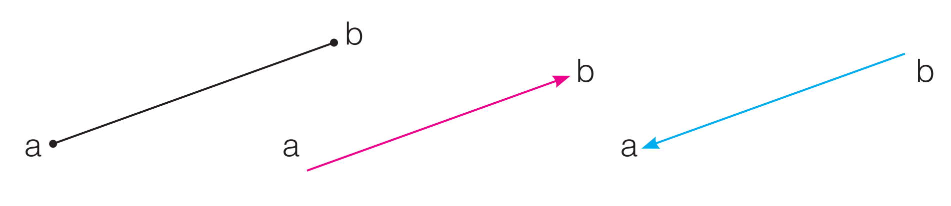


Fig. 4.1.

Definición: Se llama VECTOR EN EL PLANO a un segmento de recta dirigido.
El punto inicial de la flecha (a) se llama "cola" del vector, y el punto terminal (b) se llama "cabeza" del vector.

Notación: Se escriben los dos puntos extremos (cola y cabeza) con una flecha en la parte superior $\overrightarrow{ab}$ o $\overrightarrow{ba}$.

También se utiliza una sola letra minúscula con una flecha en la parte superior o la letra en negrilla, así: $\overrightarrow{ab} = \vec{v} = \mathbf{v}$.
En este módulo utilizaremos esta última notación, es decir, los vectores se designarán con letras minúsculas en negrilla.

Un vector **v** queda bien definido por:
(1) La DIRECCIÓN, determinada por la pendiente de la recta que contiene al segmento.
(2) La MAGNITUD, determinada por la distancia entre los dos puntos que definen el segmento (es siempre positiva).
(3) El SENTIDO, depende de la orientación que se le da al segmento.

Definición: Dos vectores **u** y **v** son IGUALES si y sólo si, tienen la misma dirección, magnitud y sentido.

En el plano geométrico (lo llamaremos S), un vector puede tener infinitas representaciones, se llama VECTOR LIBRE y se puede graficar donde convenga.

Todas las flechas del mismo color representan el mismo vector, dado que tienen la misma dirección, magnitud y sentido (figura 4.2).

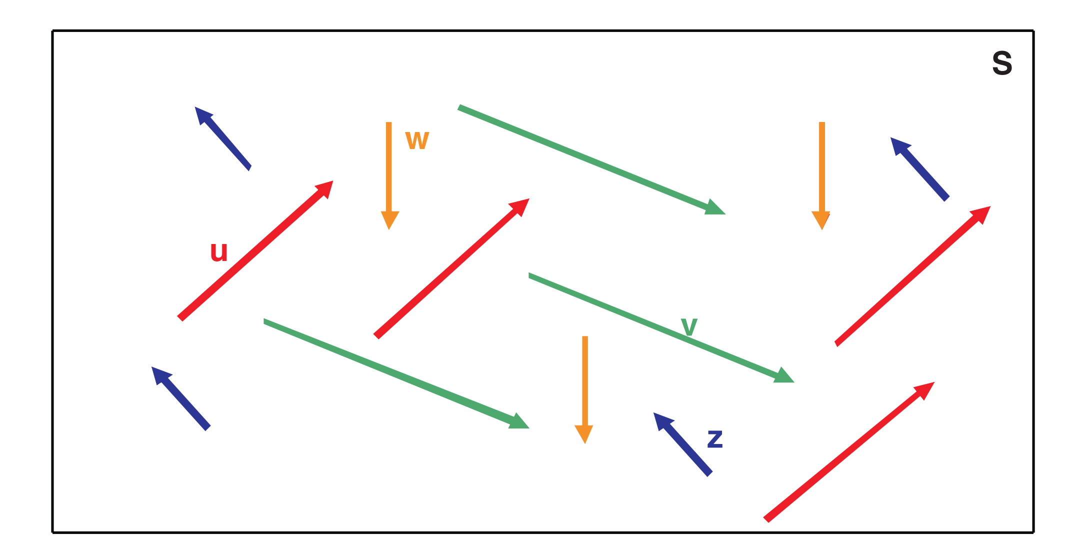


Fig. 4. 2.

En el plano cartesiano ($\Re^2$), todos los vectores se representan tomando como punto inicial (cola) de la flecha el origen del sistema de coordenadas (figura 4.3 a). Por tanto, la representación geométrica de cada vector es única. Se llama VECTOR LIGADO y queda definido por un punto cualquiera del plano, que es el punto terminal (cabeza) de la flecha (figura 4.3 b).

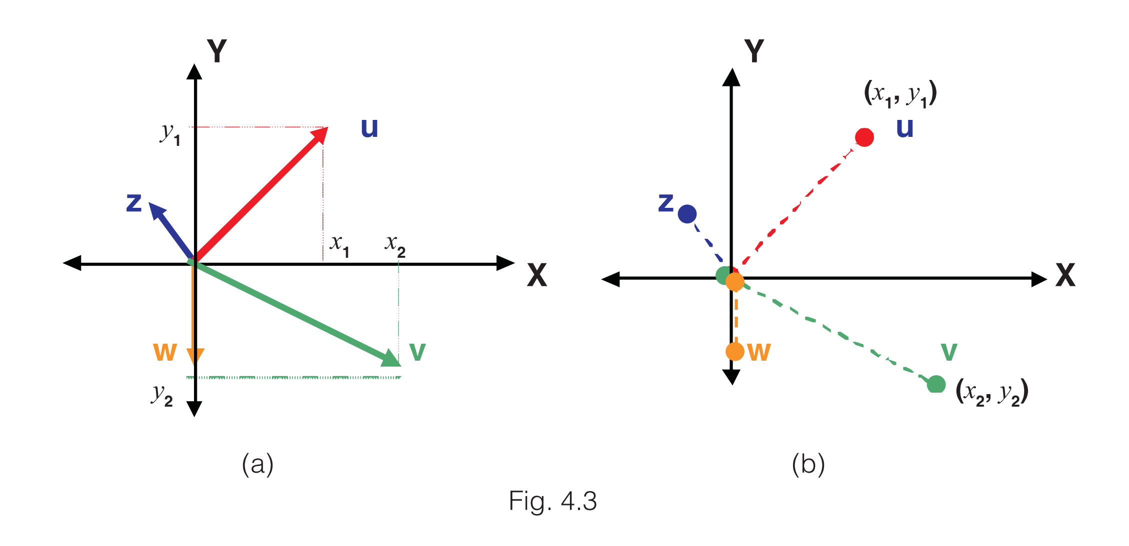


Fig. 4.3

Como cada punto del plano representa un par ordenado (x, y) de números reales, todo vector del plano cartesiano $\Re^2$, queda definido por un par ordenado. Sus componentes x y y se llaman COORDENADAS DEL VECTOR.

Notacion: $\mathbf{u} = (x_1 , y_1)$ $\mathbf{v} = (x_2 , y_2)$

x_1 y y_1 son las coordenadas del vector **u**.
x_2 y y_2 son las coordenadas del vector **v**.

$\mathbf{u} = \mathbf{v}$ si solo si $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$

Definición: Se llama NORMA de un vector **v** a la longitud del segmento que lo define. Se denota $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

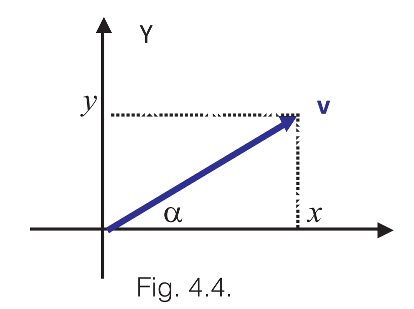


Fig. 4.4.

Si $\mathbf{v} = (x, y)$ entonces

$$\| \mathbf{v} \| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\| \mathbf{v} \|^2 = x^2 + y^2 \quad \text{(Tr. de Pitágoras)}$$

Al marcar las componentes del vector **v**, se forma un triángulo rectángulo en el cual, la longitud del vector es la hipotenusa, y las componentes x y y son los catetos (figura 4.4).

Definición: Se llama ANGULO DIRECCIONAL al ángulo α que forma el vector con la parte positiva del eje X. Queda definido por cualquiera de las funciones trigonométricas, así:

$$\tan(\alpha) = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \alpha \quad , \text{o} ,$$

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{y}{\|v\|} \quad \Rightarrow \quad \text{arcsen}\left(\frac{y}{\|v\|}\right) = \alpha \quad , \text{o} ,$$

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{\|v\|} \quad \Rightarrow \quad \arccos\left(\frac{x}{\|v\|}\right) = \alpha \quad \text{(figura 4.4)}$$

Definición: Se llama VECTOR NULO al vector cuya norma es cero.

Se denota $\text{o} = (0 , 0) \Rightarrow \| \text{o} \| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$

Su representación geométrica es un punto y en el plano cartesiano este punto es el origen (figura 4.5). Como este punto está en cualquier recta que pase por el origen, su dirección y sentido puede ser cualquiera.



Fig. 4.5.

Definición: Se llama VECTOR OPUESTO de **v** al vector que tiene la misma magnitud y dirección de **v** pero diferente sentido. Se denota **-v** (figura 4.6)
Si **v** = (x, y) entonces **-v** = $(-x, -y)$

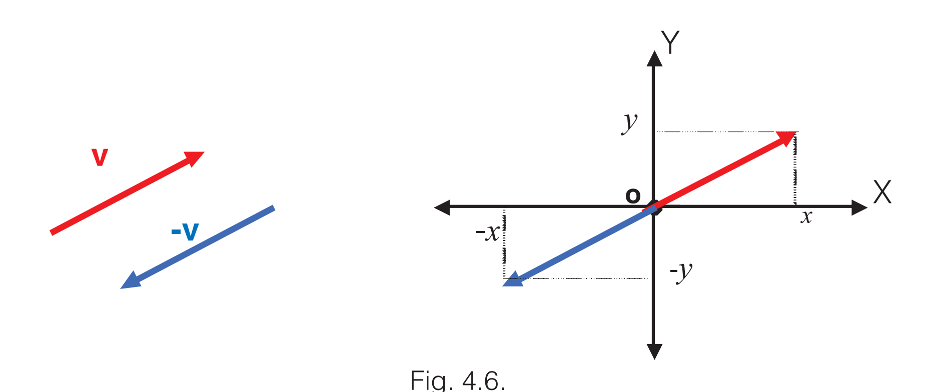


Fig. 4.6.

Definición: Se llama VECTOR NORMADO o UNITARIO de **v** al vector de longitud uno que está sobre la misma recta que contiene a **v**.

Se denota $\dfrac{\vec{v}}{\|v\|} = \left(\dfrac{x}{\|v\|}, \dfrac{y}{\|v\|}\right)$ = (cos α, sen α)

Entonces: $$\left\|\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right\| = \sqrt{\left(\dfrac{x}{\|\vec{v}\|}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{\|\vec{v}\|}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+y^2} + \dfrac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2}} = 1$$

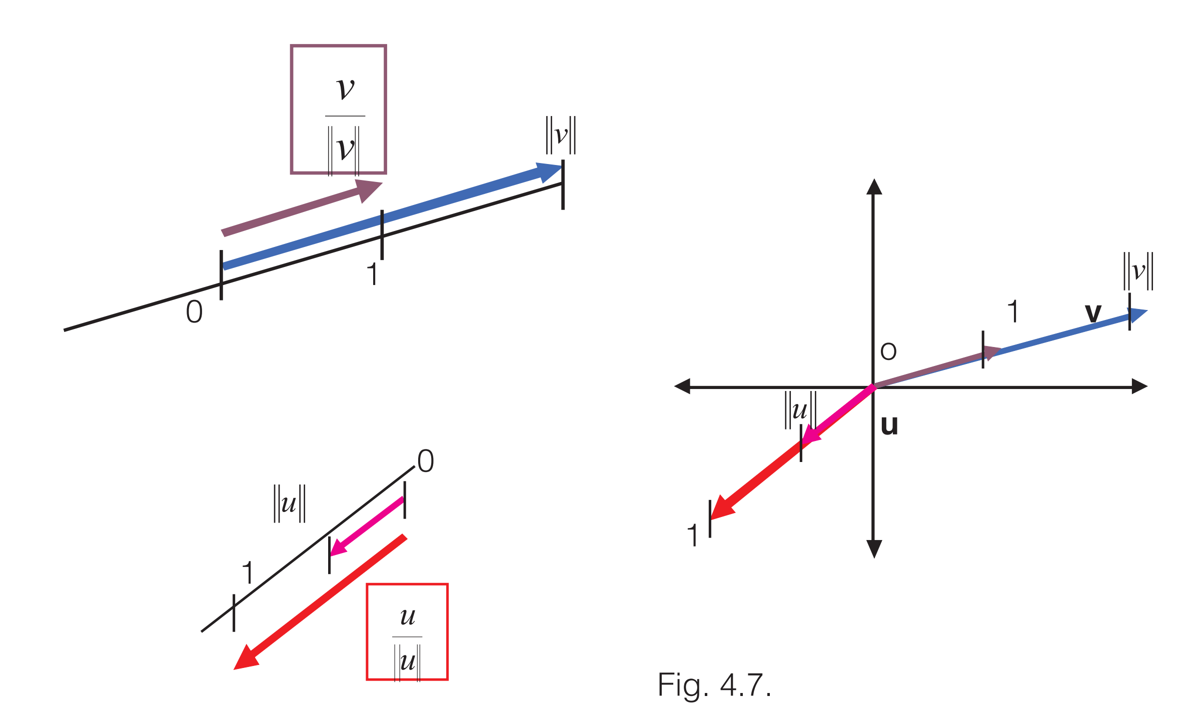


Fig. 4.7.

El vector normado puede tener igual o diferente sentido al del vector dado, y su norma puede ser mayor o menor que la del vector (figura 4.7).

Ejemplos:

Para cada uno de los vectores dados, hacer la representación geométrica en el plano cartesiano y hallar: la norma, el ángulo direccional, el vector opuesto y el correspondiente vector normado. Hacer 3 representaciones diferentes de cada vector en el plano geométrico (figura 4.8 b).

1. **a** = (3, 2)

Norma de **a**: $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

Ángulo direccional: $\alpha = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = 33{,}7^0$.

Vector opuesto de **a**: **-a** = (-3, -2).

Vector normado de **a**: $\frac{a}{\|a\|} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

2. **b** = (-2, 1).

Norma de **b**: $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

Ángulo direccional: $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{-2}\right) = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) = 153{,}4^0$

Con la calculadora, el resultado es $-26{,}6^0$ que corresponde a un ángulo del cuarto cuadrante, pero el vector **b** está en el segundo cuadrante (figura. 4.8.a). Por tanto el ángulo que corresponde es $180^0 - 26{,}6^0 = 153{,}4^0$

Vector opuesto de **b**: **-b** = (2, -1).

Vector normado de **b**: $\frac{b}{\|b\|} = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

3. **c** = (-1, -3).

Norma de **c**: $\|\mathbf{c}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$.

Ángulo direccional: $\alpha = \arctan\left(\frac{-3}{-1}\right) = \arctan(3) = 251{,}6^0$

Con la calculadora. el resultado es $71{,}6^0$, que corresponde a un ángulo del primer cuadrante, pero el vector **c** está en el tercer cuadrante (figura 4.8 a). Por lo tanto, el ángulo que corresponde es $180^0 + 71{,}6^0 = 251{,}6^0$

Vector opuesto de **c**: **-c** = (1, 3).

Vector normado de **c**: $\frac{c}{\|c\|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$.

4. **d** = (2, -2).

Norma de **d**: $\|\mathbf{d}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Ángulo direccional: $\alpha = \arctan\left(\frac{-2}{2}\right) = \arctan(-1) = -45^0$.

Por ser ángulo del cuarto cuadrante se toma $360^0 - 45^0 = 315^0$.

Vector opuesto de **d**: **-d** = (-2, 2).

Vector normado de **d**: $\frac{d}{\|d\|} = \left(\frac{2}{2\sqrt{2}}, \frac{-2}{2\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

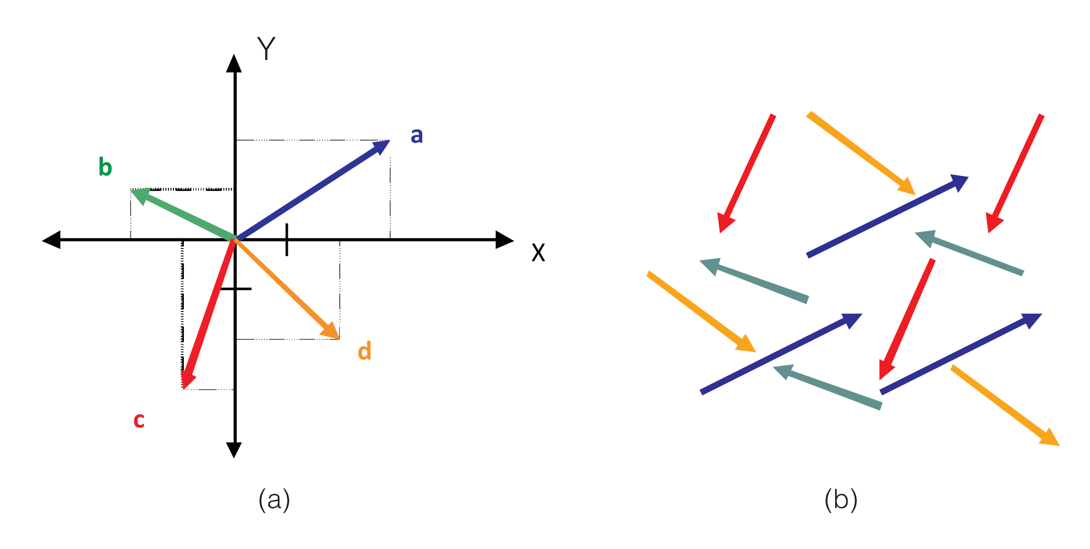


Fig. 4.8.

Ejercicio propuesto:

Para cada uno de los vectores **u** = (3, 1) y **v** = (2, -1) halle : norma, ángulo direccional, el vector opuesto y el vector normado con sentido opuesto. Haga la representación gráfica de los vectores en el plano cartesiano, y 3 representaciones diferentes de cada uno en el plano geométrico.

4.1.2. Operaciones con vectores en R^2

Se definen tres operaciones con vectores en el plano: suma, multiplicación escalar y producto escalar, las cuales serán estudiadas en esta sección con sus correspondientes propiedades e interpretaciones geométricas.

SUMA: Es una “operación binaria interna” (o clausurativa), lo que permite deducir que se suman 2 vectores en el plano y el resultado es un vector en el plano.

En el plano geométrico, los vectores se grafican uno seguido del otro, y el “vector suma” o VECTOR RESULTANTE , se forma uniendo la cola del primer vector con la cabeza del segundo (Figura 4.9 a).



Fig. 4.9. (a)

En el plano cartesiano, el vector suma se obtiene sumando las correspondientes coordenadas (Figura 4.9 b).

Definición: Si $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ se define la SUMA de **u** y **v**.

Como $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2) = (w_1, w_2) = \mathbf{w}$.

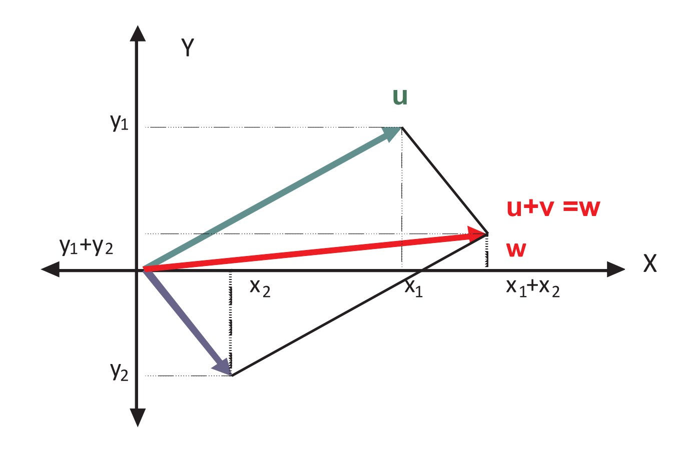
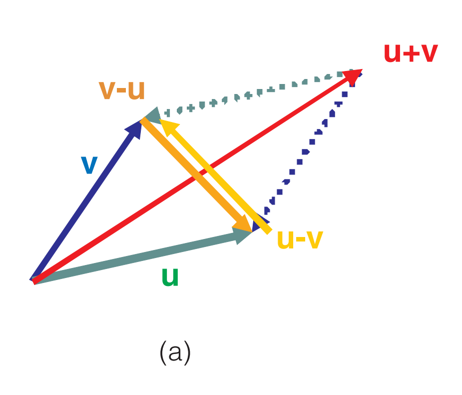


Fig. 4.9. (b)

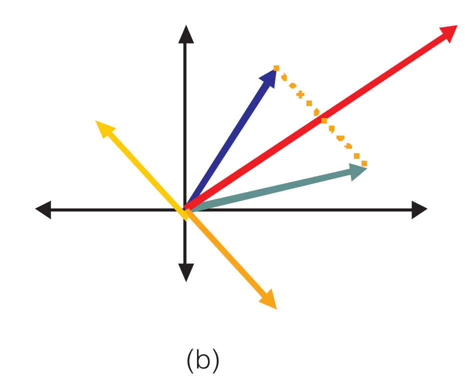
Interpretación geométrica: A partir de 2 vectores con diferente dirección se puede completar un paralelogramo. El vector suma, queda representado por la diagonal del paralelogramo que tiene su inicio en el origen de los 2 vectores, y su norma es la longitud de la diagonal. (Figura 4.10 c) .

La otra diagonal del paralelogramo, representa la diferencia de los 2 vectores. Es decir, la suma de uno de ellos con el opuesto del otro: (Figura 4. 10 a)

$\mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{u} - \mathbf{v}$, o , $\mathbf{v} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ según sea el sentido de la flecha.

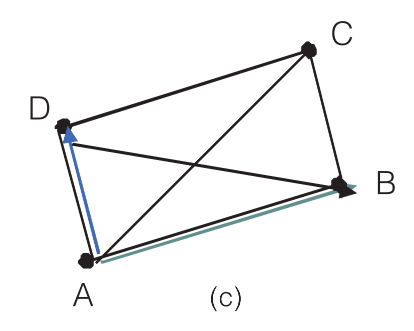


(a)



(b)

Fig. 4.10.



(c)

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|$$

$$\|\overrightarrow{DB}\| = \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\|$$

Propiedades de la suma

1. Clausurativa: $\forall\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Re^2,\quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w} \in \Re^2$.

Esto quiere decir que al sumar 2 vectores en el plano, el resultado es otro vector del plano (Figura 4.10 b).

Demostración: Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \in \Re^2$: $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, entonces:

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2)$	definición de vector en $\Re^2$.
$= (u_1+v_1 , u_2+v_2)$	definición de + en $\Re^2$.
$= (w_1, w_2)$	+ es clausurativa en $\Re$.
$= \mathbf{w}$	definición de vector en $\Re^2$.

2. Conmutativa: **u** + **v** = **v** + **u**.

Significa que el orden en que se suman los vectores, no cambia el resultado.

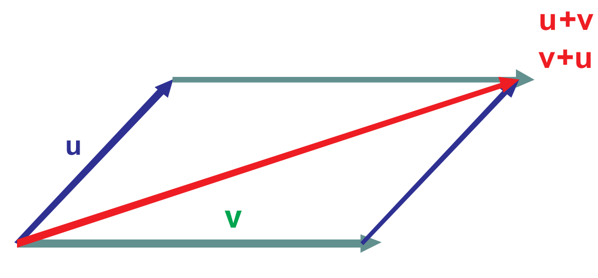


Fig. 4.11.

u + v suma por encima de la diagonal.
u + v suma por debajo de la diagonal. (Figura 4.11)

Demostración: Si **u** = (u_1, u_2) y **v** = (v_1, v_2) , entonces:

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2)$	definición de vector en $\Re^2$.
$= (u_1+v_1 , u_2+v_2)$	definición de + en $\Re^2$.
$= (v_1+u_1 , v_2+u_2)$	+ es conmutativa en $\Re$.
$= (v_1, v_2) + (u_1, u_2)$	definición de + en $\Re^2$.
$= \mathbf{v} + \mathbf{u}$	definición de vector en $\Re^2$.

3. Asociativa: [**u** + **v**] + **w** = **u** + [**v** + **w**] = **u** + **v** + **w**.

Quiere decir que se pueden sumar más de 2 vectores, pero siempre en forma binaria sin que la forma de agrupar afecte el resultado. Por lo tanto, se puede prescindir de los paréntesis. (Figura 4.12).

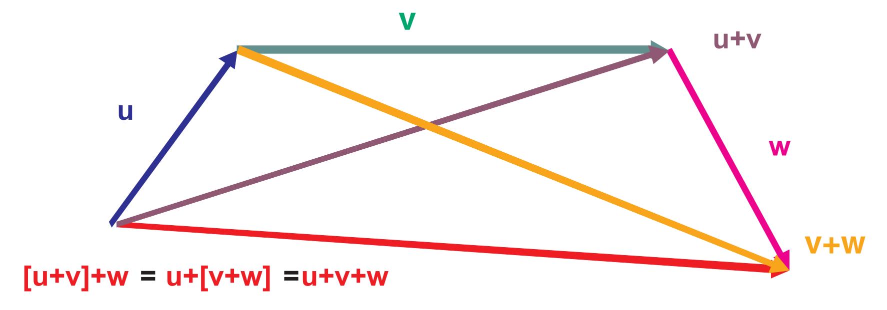


Fig. 4.12.

Demostración: $[\mathbf{u}+\mathbf{v}]+\mathbf{w} = [(u_1,u_2)+(v_1,v_2)] + (w_1,w_2)$ definición vector en $\Re^2$.
$= (u_1+v_1 , u_2+v_2) + (w_1,w_2)$ definición de + en $\Re^2$.
$= ([u_1+v_1]+w_1, [u_2+v_2]+w_2)$ definición de + en $\Re^2$.
$= (u_1+[v_1+w_1], u_2+[v_2+w_2])$ + es asociativa en $\Re$.
$= (u_1,u_2) + (v_1+w_1 ,v_2+w_2)$ definición de + en $\Re^2$.
$= (u_1,u_2) + [(v_1,v_2)+(w_1,w_2)]$ definición de + en $\Re^2$.
$= \mathbf{u}+[\mathbf{v}+\mathbf{w}]$ definición vector en $\Re^2$.

4. Modulativa: $\forall u \in \Re^2$, $\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Esto significa que el vector nulo **o**, es el MÓDULO o ELEMENTO NEUTRO para la suma, porque cualquier vector sumado con el vector nulo no cambia (Figura 4.13).

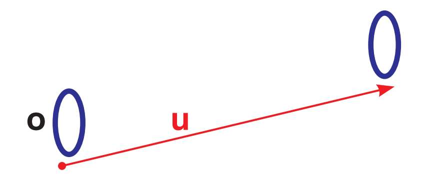
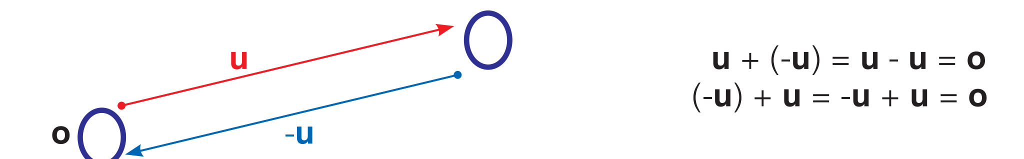


Fig. 4.13.

Demostración: $\mathbf{u} + \mathbf{o} = (u_1, u_2) + (0, 0)$ definición de vector en $\Re^2$.
$= (u_1+0 , u_2+0)$ definición de + en $\Re^2$.
$= (u_1, u_2)$ 0 es el módulo de + en $\Re$.
$= \mathbf{u}$ definición de vector en $\Re^2$.

5. **Invertiva:** $\forall u \in \Re^2, \exists(-\mathbf{u}) \in \Re^2$ tal que: $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{o}$

Significa que para cada vector **u** existe un único vector **-u** llamado VECTOR OPUESTO de **u** , porque la suma de estos 2 vectores es el vector nulo, el cual es módulo de la suma (Figura 4.14).



$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{o}$
$(-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{o}$

Fig. 4.14.

Demostración: $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (u_1, u_2) + (-u_1, -u_2)$ definición de vector en $\Re^2$.
$= (u_1 - u_1 , u_2 - u_2)$ definición de + en $\Re^2$.
$= (0, 0)$ + es invertiva en $\Re$.
$= \mathbf{o}$ definición del vector nulo.

Ejemplos:

1. Si $\mathbf{u} = (3, -2)$, $\mathbf{v} = (-1, 5)$ y $\mathbf{w} = (2, -3)$ verificar las propiedades enunciadas de la suma de vectores.

Solución:

Clausurativa:
$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, -2) + (-1, 5) = (3-1, -2+5) = (2, 3)$

Conmutativa:
$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3-1, -2+5) = (2, 3) = (-1+3, 5-2) = \mathbf{v} + \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

Asociativa:
$[\mathbf{u} + \mathbf{v}] + \mathbf{w} = (3-1, -2+5) + (2, -3) = (2, 3) + (2, -3) = (4, 0)$
$\mathbf{u} + [\mathbf{v} + \mathbf{w}] = (3, -2) + (-1+2, 5-3) = (3, -2) + (1, 2) = (4, 0)$
$\Rightarrow [\mathbf{u} + \mathbf{v}] + \mathbf{w} = \mathbf{u} + [\mathbf{v} + \mathbf{w}] = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$

Modulativa:
$\mathbf{u} + \mathbf{o} = (3, -2) + (0, 0) = (3, -2) = \mathbf{u}$
$\mathbf{v} + \mathbf{o} = (-1, 5) + (0, 0) = (-1, 5) = \mathbf{v}$
$\mathbf{w} + \mathbf{o} = (2, -3) + (0, 0) = (2, -3) = \mathbf{w}$

Invertiva:
$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (3, -2) + (-3, 2) = (0, 0) = \mathbf{o}$
$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = (-1, 5) + (1, -5) = (0, 0) = \mathbf{o}$
$\mathbf{w} + (-\mathbf{w}) = (2, -3) + (-2, 3) = (0, 0) = \mathbf{o}$

2. Un bote viaja con una rapidez de 10 millas por hora hacia el este y sopla un viento cruzado de sur a norte de 20 millas por hora (ver Figura 4.15). ¿Cuál es el vector velocidad del bote?. Indique su rapidez y dirección?

Solución:

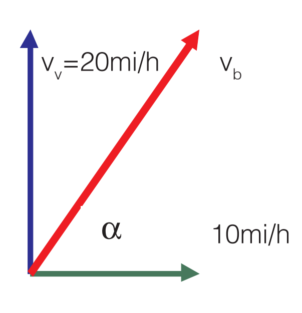


Fig. 4.15.

$$\|v_b\| = \sqrt{10^2 + 20^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5} \approx 22{,}36.$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{20}{10}\right) = \arctan(2) = 63{,}43^0.$$

El bote se mueve con una rapidez de 22,36 mi/h en dirección $63{,}43^0$ al noroeste.

Ejercicios propuestos:

1. Encuentre la magnitud y dirección de cada uno de los vectores dados:

a) **u** = (-5, 8) . b) **v** = $(1, -\sqrt{3})$. c) **w** = $(-2/3, -3/2)$.

2. Encuentre un vector unitario que tenga el mismo sentido que el vector:

a) **x** = $(\sqrt{2}, -1)$. b) **y** = (1, 1).

3. Encuentre en cada caso 2 vectores u y v que tengan la magnitud y dirección dadas:

a) norma 3 y ángulo direccional $\pi/3$.

b) norma 3/4 y ángulo direccional 135^0

4. Dados los vectores a = (3, -2) y b = (-4, -1) encuentre y grafique los vectores:

a) **a + b** . b) **a – b** . c) – (**a + b**) . d) – **a + b** .

5. Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección y sentido del vector **u** + **v** – **w**, si **u** = (2, -4); **v** = (-3, 0) y **w** = (0, -2).

6. Muestre que el vector $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es un vector normado.

7. Para cada uno de los vectores dados encuentre sen α y cos α donde α es el ángulo direccional del vector:

a) **v** = (-3, 4) . b) **v** = (5, -5) . c) **v** = (1, 0). d) **v** = (0, 1).

8. Si **u** = (2, 3) y **v** = (-3, 4) calcule :

a) $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ b) $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ c) $\|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{u}\|$ d) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$

e) Haga la representación gráfica de todos los vectores calculados.

MULTIPLICACION ESCALAR: Es una operación definida entre un real y un vector cuyo resultado es un vector.

En el plano geométrico a partir de un vector **v**, podemos construir otros vectores, por ejemplo: el doble del vector 2**v**; la mitad del vector (½)**v**; el opuesto del triple del vector, (-3)**v**; el opuesto del vector (-1)**v**; el vector nulo 0**v**; el mismo vector 1**v**. Todos ellos tienen la misma dirección y por tanto, están sobre la misma recta (Figura 4.16).

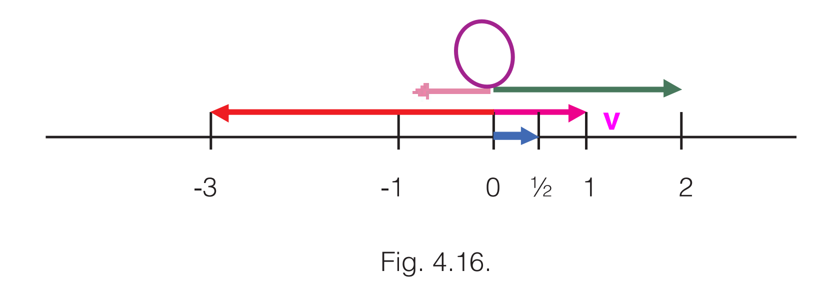


Fig. 4.16.

Para cualquiera de los anteriores vectores respeto al vector **v**, se dice que es un "múltiplo escalar de **v**", es decir, se obtiene multiplicando al vector **v** por un real (escalar). De todos ellos se dice que son "vectores linealmente dependientes".

Definición: Dado un vector $\mathbf{v} = (x, y)$ y $r \in \Re$ se define la MULTIPLICACIÓN ESCALAR de **v** por r como:

$$r\,\mathbf{v} = (rx\ ,\ ry) = (w_1, w_2) = \mathbf{w}$$

Se dice que **w** es un MULTIPLO ESCALAR de **v**.

Recíprocamente se puede asumir que **v** es múltiplo escalar de **w** puesto que

$\mathbf{v} = \frac{1}{r}\,\mathbf{w}$ si $r \neq 0$.

De los dos vectores **v** y **w** se dice que son LINEALMENTE DEPENDIENTES , porque están sobre la misma recta, es decir, uno de ellos depende del otro.

Interpretación geométrica: Si se efectuaran los productos escalares de un vector cualquiera **v** con cada uno de los números reales, el resultado sería una recta en la que cada punto representa un vector, al cual le corresponde un real llamado ABSCISA DEL VECTOR. A la recta se le llama D_0 para indicar que cada punto define un vector con su origen en **o**.

En la figura 4.16, la abscisa del vector **u** es 1, la del vector 2**u** es 2, la del vector -3**u** es –3, la del vector ½ **u** es $\frac{1}{2}$ y la del vector nulo o es 0.

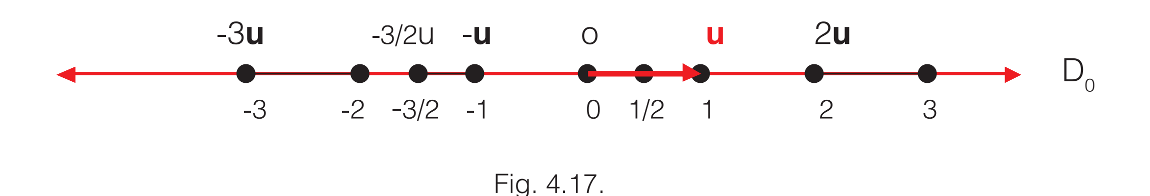


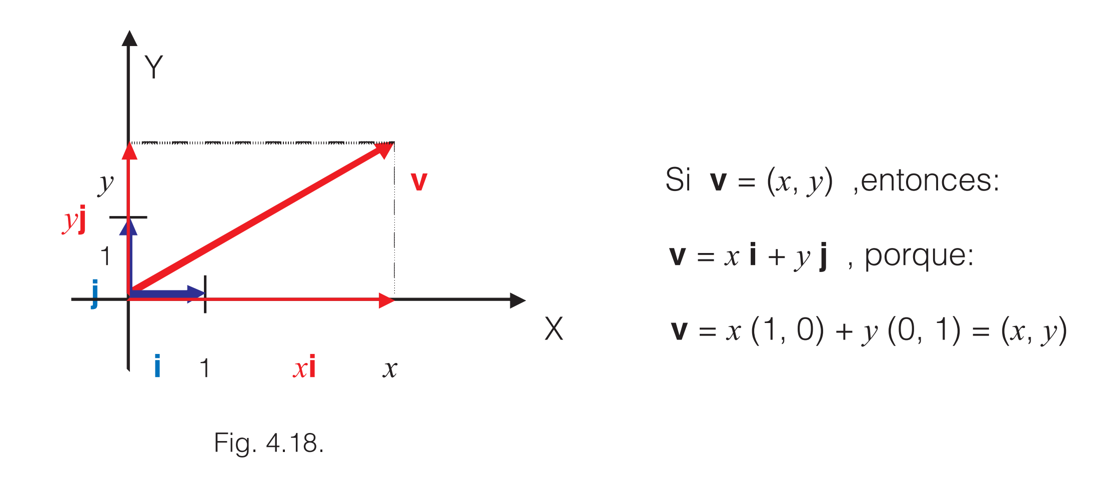
Fig. 4.17.

Como la recta D_0 se forma a partir del vector **u** (Figura 4.17), se dice que "**u** es un vector GENERADOR de la recta D_0.

En el plano cartesiano, el vector unitario sobre el eje X se llama **i** y sus coordenadas son (1, 0); el vector unitario sobre el eje Y se llama **j** y sus coordenadas son (0, 1). (Figura 4.18)

El vector **i** es un generador del eje X, por tanto, cualquier vector sobre el eje X es un múltiplo escalar de **i**. Así mismo, el vector **j** es un generador del eje Y y cualquier vector del sobre el eje Y es un múltiplo escalar de **j**.

Como todo vector **v** $\in \Re^2$ queda definido por un par ordenado (x, y), **v** se puede expresar como la suma de un múltiplo escalar de **i** con un múltiplo escalar de **j**.



Si **v** = (x, y) ,entonces:

v = x **i** + y **j** , porque:

v = x (1, 0) + y (0, 1) = (x, y)

Fig. 4.18.

Se dice que **v** es una COMBINACION LINEAL de los vectores **i** y **j** , es decir, una suma de múltiplos escalares de **i** y **j**. (Figura 4.18)

Ahora, cualquier vector del plano queda definido de dos formas:

(1) Por sus coordenadas: $\mathbf{v} = (x, y)$
(2) como combinación lineal de **i** y **j**: $\mathbf{v} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$

Observamos en la figura 4.18, los vectores **i** y **j** no están sobre la misma recta, es decir, no son linealmente dependientes. Se dice que son LINEALMENTE INDEPENDIENTES, lo cual significa que ninguno de ellos es múltiplo escalar del otro.

Como todo vector del plano puede ser expresado en términos de **i** y **j**, se dice que el conjunto { **i, j** }, GENERA al plano $\Re^2$ y se llama BASE CANÓNICA o NATURAL del plano cartesiano.

Propiedades de la multiplicación escalar:

1. Para todo vector $\mathbf{v} \in \Re^2$, $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ y $0\mathbf{v} = \mathbf{o}$.

2. Si $r, s \in \Re$ y $\mathbf{v} \in \Re^2$: $[r \cdot s]\ \mathbf{v} = r[s\,\mathbf{v}]$.

3. Si $r, s \in \Re$ y $\mathbf{v} \in \Re^2$: $[r + s]\ \mathbf{v} = r\,\mathbf{v} + s\,\mathbf{v}$.

4. Si $r \in \Re$ y $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Re^2$: $r[\mathbf{u} + \mathbf{v}] = r\,\mathbf{u} + r\,\mathbf{v}$.

5. Si $r \in \Re$, para todo vector $\mathbf{v} \in \Re^2$: $\|\mathbf{v}\| = r\ \|\mathbf{v}\|$.

Demostración (1):

Si $\mathbf{v} = (x, y)$ entonces $1\,\mathbf{v} = 1(x, y) = (1 \cdot x\ ,\ 1 \cdot y) = (x, y) = \mathbf{v}$.

$$0\,\mathbf{v} = 0\,(x, y) = (0 \cdot x\ ,\ 0 \cdot y) = (0, 0) = \mathbf{o}.$$

Ejercicios resueltos:

1. Demostrar la propiedad 2 de la multiplicación escalar.

Demostración: Si $\mathbf{v} \in \Re^2$: $\mathbf{v} = (x\ ,\ y)$ entonces

$[r \cdot s]$ **v**	$= [r \cdot s]\,(x\,,\,y)$	definición del vector **v**.
	$= ([r \cdot s] \cdot x\,,\,[r \cdot s] \cdot y)$	definición de mult. escalar.
	$= (\,r \cdot [s \cdot x]\ \ ,\,(r \cdot [s \cdot y])$	+ es asociativa en $\Re$.
	$= r \cdot (s \cdot x\,,\,s \cdot y\,)$	definición de mult. escalar.
	$= r\,[s\,(\,x\,,\,y\,)]$	definición de mult. escalar.
	$= r\,[s\,\mathbf{v}]$	definición del vector **v**.

2. Si $r = -2$, $s = \frac{1}{3}$, **u** = (6, 2) y **v** = (-4, 3) verificar las propiedades 3 y 4 de la multiplicación escalar.

Propiedad 3: $[r + s]$ **v** = r **v** + s **v**. Entonces:

$$\left[-2+\frac{1}{3}\right](6\,,2\,)=-2\,(6\,,2\,)+\frac{1}{3}\,(6\,,2\,)$$
$$-\frac{5}{3}\,(6\,,2\,)=(-12\,,-4\,)+\left(2\,,\frac{2}{3}\right)$$
$$\left(-10\,,-\frac{10}{3}\right)=\left(-10\,,-\frac{10}{3}\right)$$

Propiedad 4: r [**u** + **v**] = r **u** + r **v**. Entonces:

$$-2\,[(6\,,2\,)+(-4\,,3\,)]=-2\,(6\,,2\,)+(-2)\,(-4\,,3\,)$$
$$-2\,(2\,,5\,)=(-12\,,-4\,)+(8\,,-6\,)$$
$$(-4\,,-10\,)=(-4\,,-10\,)$$

3. Expresar los vectores **a** = $\left(-\frac{2}{5},1\right)$ y **b** = (0, -3) como combinación lineal de los vectores **i** y **j**. Efectuar la suma de **a** y **b**. Expresar el resultado de la suma en coordenadas cartesianas.

Solución: $\mathbf{a} = \left(-\frac{2}{5},1\right) \Rightarrow \mathbf{a} = -\frac{2}{5}\ \mathbf{i} + 1\,\mathbf{j} = -\frac{2}{5}\ \mathbf{i} + \mathbf{j}$

$\mathbf{b} = (\,0, -3\,) \Rightarrow \mathbf{b} = 0\,\mathbf{i} + (-3)\,\mathbf{j} = \mathbf{o} - 3\mathbf{j} = -3\mathbf{j}$

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (-\frac{2}{5}\ \mathbf{i} + \mathbf{j}\,) + (\,-3\mathbf{j}\,)$

$= -\frac{2}{5}\ \mathbf{i} + (\,\mathbf{j} - 3\mathbf{j}\,)$

$$= -\frac{2}{5}\ \mathbf{i} + (\ 1 - 3)\ \mathbf{j}$$

$$= \ -\frac{2}{5}\ \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$$

Entonces: $\mathbf{a} + \mathbf{b}\ = -\frac{2}{5}\ \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y en coordenadas cartesianas $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \left(-\frac{2}{5}, -2\right)$

4. Si $\mathbf{u} = (1, -2)$, $\mathbf{v} = (-3, -1)$, $\mathbf{w} = (2, 0)$, encuentre un vector $\mathbf{x}$ tal que

$2\ (\ \mathbf{u} + \mathbf{v}\ ) - 3\ \mathbf{x} = \frac{1}{2}\ \mathbf{w}$.

Solución: Aplicando convenientemente las propiedades de la suma y la multiplicación escalar , se realiza el proceso algebraico para “despejar” a $\mathbf{x}$.

$$2\ (\ \mathbf{u} + \mathbf{v}\ ) - 3\ x = \frac{1}{2}\ \mathbf{w} \quad \Rightarrow \quad 2\ (\ \mathbf{u} + \mathbf{v}\ ) - \frac{1}{2}\ \mathbf{w} = 3\ \mathbf{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}[2\ (\ \mathbf{u} + \mathbf{v}\ ) - \frac{1}{2}\ \mathbf{w}\ ] = \ \mathbf{x}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x} = \frac{2}{3}\ (\ \mathbf{u} + \mathbf{v}\ ) - \frac{1}{6}\ \mathbf{w}$$

Remplazando: $\mathbf{x} = \frac{2}{3}\ [(1, -2) + (-3, -1)] - \frac{1}{6}\ (2, 0)$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \frac{2}{3}\ (-2, -3) - \frac{1}{6}\ (2, 0)$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = (-\frac{4}{3}\ , -2\ ) + \ (-\frac{1}{3}\ , 0\ )$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = (-\frac{5}{3}\ , -2\ )$$

Luego el vector $\mathbf{x}$ que satisface la ecuación vectorial $2\ (\ \mathbf{u} + \mathbf{v}\ ) - 3\ \mathbf{x} = \frac{1}{2}\ \mathbf{w}$

es $\mathbf{x} = (-\frac{5}{3}\ , -2\ )$.

Se puede verificar que la solución obtenida es correcta, haciendo la sustitución en la ecuación dada. Así:

$$2\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - 3\,\mathbf{x} = \frac{1}{2}\,\mathbf{w} \quad \text{entonces:}$$

$$2\,[(1, -2) + (-3, -1)] - 3\,(-\frac{5}{3}, -2) = \frac{1}{2}\,(2, 0)$$

$$2\,(-2, -3) - 3\,(-\frac{5}{3}, -2) = \frac{1}{2}\,(2, 0)$$

$$(-4, -6) + (5, 6) = (1, 0)$$

5. Si $\mathbf{a} = (4, -3)$ y $\mathbf{b} = (2, 0)$ calcular $\|\mathbf{a}\|\,\mathbf{b} - \|\mathbf{b}\|\,\mathbf{a}$.

Solución: $\mathbf{a} = (4, -3) \Rightarrow \|\mathbf{a}\| = 5.$

$\mathbf{b} = (2, 0) \Rightarrow \|\mathbf{b}\| = 2.$

Entonces: $\|\mathbf{a}\|\,\mathbf{b} - \|\mathbf{b}\|\,\mathbf{a} = 5\,(2, 0) - 2\,(4, -3)$

$= (10, 0) + (-8, 6)$

$= (2, 6)$

6. Encuentre el vector $\mathbf{y}$, para el cual, el resultado de $3[\frac{1}{2}\,\mathbf{u} + \mathbf{y}] - \frac{3}{2}\,\mathbf{w}$ es el vector nulo $\mathbf{o}$, si $\mathbf{u} = (-4, 2)$ y $\mathbf{w} = (6, -8)$.

Solución: Se plantea la ecuación $3[\frac{1}{2}\,\mathbf{u} + \mathbf{y}] - \frac{3}{2}\,\mathbf{w} = \mathbf{o}$ y se despeja $\mathbf{y}$

$$3[\frac{1}{2}\,\mathbf{u} + \mathbf{y}] - \frac{3}{2}\,\mathbf{w} = \mathbf{o} \Rightarrow \frac{3}{2}\,\mathbf{u} + 3\,\mathbf{y} - \frac{3}{2}\,\mathbf{w} = \mathbf{o}.$$

$$\Rightarrow 3\,\mathbf{y} = -\frac{3}{2}\,\mathbf{u} + \frac{3}{2}\,\mathbf{w}\ .$$

$$\Rightarrow \mathbf{y} = \frac{3}{2}\,[-\frac{3}{2}\,\mathbf{u} + \frac{3}{2}\,\mathbf{w}]\ .$$

$$\Rightarrow \mathbf{y} = -\frac{1}{2}\,\mathbf{u} + \frac{1}{2}\,\mathbf{w}.$$

Entonces: $\mathbf{y} = -\frac{1}{2}(-4, 2) + \frac{1}{2}(6, -8) = (2, -1) + (3, -4) = (5, -5)$.

Por tanto, el vector **y** = (5, -5), es el vector que satisface la ecuación dada.

Teorema: Las siguientes afirmaciones para dos vectores **u** y **v** en el plano son equivalentes:

(1) **u** es múltiplo escalar de **v** ,o, **v** es múltiplo escalar de **u**.
(2) **u** y **v** son linealmente dependientes (L.D.).
(3) **u** y **v** son paralelos ($\mathbf{u} \parallel \mathbf{b}$).

Las equivalencias se deducen a partir de la definición e interpretación geométrica de la multiplicación escalar.

Ejemplos:

1. Si **u** = (1, -2) y **v** = (3, 1) encuentre un vector **w** $\in \Re^2$ normado (de longitud 1) y paralelo a 2**u** – **v**.

Solución: Primero calculamos el vector 2**u** – **v** que llamaremos **z**, entonces:

$$\mathbf{z} = 2(1, -2) - (3, 1) = (2, -4) + (-3, -1) = (-1, -5)$$

Como el vector **w** debe ser paralelo a **z**, entonces es un múltiplo escalar de **z**. Es decir, existe una constante k , tal que, **w** = k**z**. Como el vector **w** debe ser normado, tomamos la constante k igual al inverso de la norma de **z**.

$$\|\mathbf{z}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{26} \quad \text{entonces} \quad \mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{26}}(-1,-5) = \left(-\frac{1}{\sqrt{26}}, -\frac{5}{\sqrt{26}}\right)$$

Es el vector pedido.

2. Decidir si los siguientes pares de vectores son o no, linealmente dependientes:
a) **u** = (2, -3) y **v** = (-1, 3/2). b) **u** = (-2, 4) y **v** = ($-\sqrt{2}$, 2).

Solución: Si **u** y **v** son vectores linealmente dependientes, uno de ellos debe ser múltiplo escalar del otro, es decir, debe existir para cada caso una constante k tal que **u** = k**v**.

a) (2, -3) = k (-1, 3/2) $\Rightarrow$ (2, -3) = (-1k, 3/2 k)

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 2 = -k \;\Rightarrow\; k = -2 \\ -3 = \frac{3}{2}k \;\Rightarrow\; k = -2 \end{array}$$

Como el valor de k es el mismo para las 2 componentes, los vectores **u** y **v** son linealmente dependientes.

b) (-2, 4) = k (- √2, 2) $\Rightarrow$ (-2, 4) = (-√2 k, 2k)

$$\Rightarrow \begin{array}{l} -2 = -\sqrt{2}k \Rightarrow k = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\ 4 = 2k \Rightarrow k = 2 \end{array}$$

Como la constante k no es la misma para las 2 componentes, es imposible que se cumpla la condición **u** = k**v**, luego los vectores **u** y **v**, no son linealmente dependientes. En este caso los vectores son linealmente independientes.

Ejercicios propuestos:

1. Encuentre todos los vectores **q** $\in \Re^2$, tales que $\overrightarrow{PQ}$ tenga su punto inicial en el punto P = (2, -1) , y que sean paralelos al vector **u** = (7, 6).

2. Si **u** = (-3, 2), **v** = (1, 0) y **w** = (2, -4) calcule :

a) $\|-2\mathbf{u}\| + 2\|\mathbf{u}\|$ b) $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ c) $\frac{1}{\|u+v\|}[\mathbf{u}+\mathbf{v}]$

3. Si **u**, **v** y **w** son los vectores del ejercicio anterior (2.), encuentre las componentes del vector **x** $\in \Re^2$, para el cual 2**u** – **v** + **x** = 7**x** + **w**.

4. Dados **u** = (1, -1) y **v** = (2, 7) se define **z** = a**u** + b**v** . Encuentre los valores de las constantes a y b, para que: a) **z** = **o** (vector nulo en $\Re^2$) b) **z** = (3, 5).

5. Demuestre que no existen escalares r y s , tales que r(2, -3) + s(-4, 6) = (5, 3).

6. Dados los vectores **u** = 3**i** – **j** ; **v** = 5**j** y **w** = 2**i** , encuentre un vector **y** = 3[**w** + 2**v**] – 4**u** y expréselo en la forma y = r**i** + s**j** donde r , s $\in \Re$.

PRODUCTO ESCALAR: Es una operación definida entre 2 vectores, y el resultado es un real (escalar). Esta operación también se conoce con el nombre de PRODUCTO INTERNO o PRODUCTO PUNTO.

Al considerar 2 vectores del plano, teniendo en cuenta la dirección, hay dos posibilidades:

1. Los vectores son "paralelos" o "linealmente dependientes", porque están sobre la misma recta o sobre rectas paralelas
2. Los vectores son "no paralelos" o "linealmente independientes" porque están sobre rectas que se cruzan.

Si los vectores son PARALELOS hay dos posibilidades:

1. Los vectores tienen el mismo sentido, el ángulo entre ellos es 0^0
2. Los vectores tienen diferente sentido, el ángulo entre ellos es 180^0

En el caso de vectores paralelos del mismo sentido, el producto escalar se define como el producto de las normas de los 2 vectores (figura 4.19 a). Si los vectores son paralelos y de sentidos opuestos, se define como el opuesto del producto de las normas (figura 4.19 b). Los dos casos se resumen diciendo que el producto escalar de 2 vectores paralelos, es "el producto de sus abscisas".

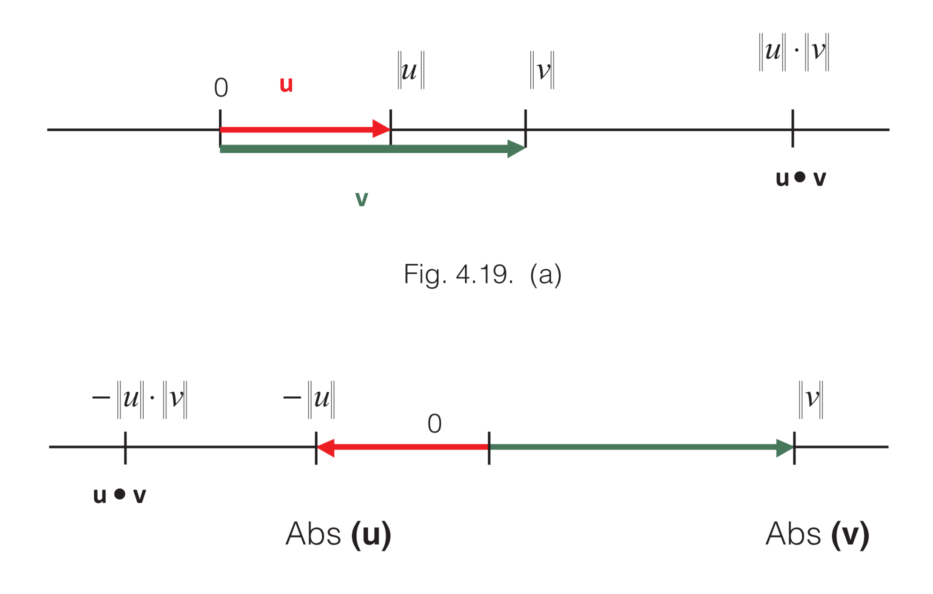


Fig. 4.19. (a)

Fig. 4.19. (b)

Nota: La norma siempre es positiva. La abscisa puede ser positiva o negativa.

Si los vectores son NO PARALELOS, el producto escalar se define proyectando un vector sobre el otro, y multiplicando las abscisas del "vector proyección" **p** y del vector **v**, sobre el que se hizo la proyección.

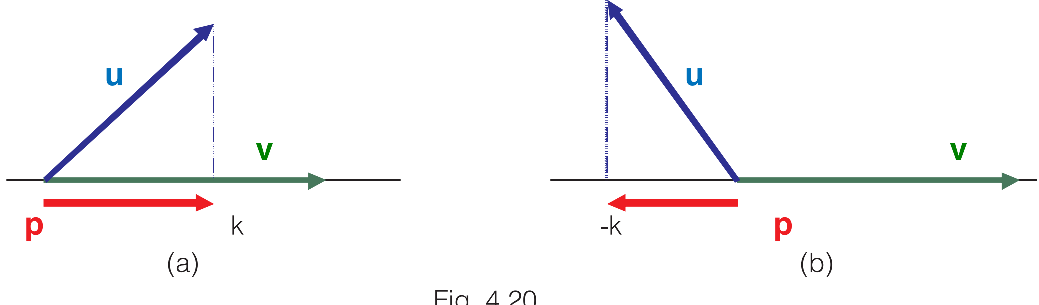


Fig. 4.20.

Definición: Se llama VECTOR PROYECCIÓN de **u** sobre **v,** al vector que se obtiene proyectando perpendicularmente el vector **u**, sobre la recta que contiene el vector **v** (Figura 4.21).

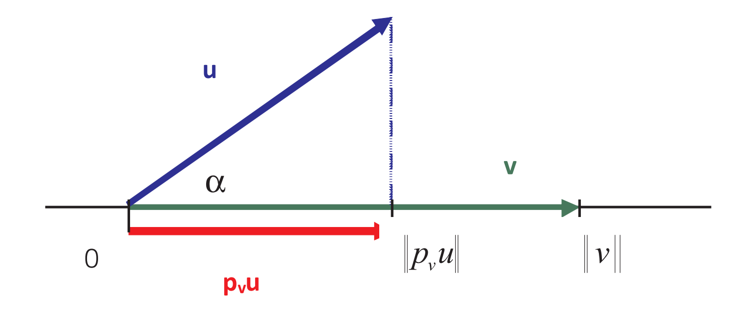


Fig. 4.21.

Se denota $\mathbf{p_v u}$ y es un múltiplo escalar del vector normado de **v**.

Queda definido como $\mathbf{p_v u} = k \dfrac{v}{\|v\|}$, donde k es la abscisa del vector $\mathbf{p_v u}$.

Para calcular k, observando la gráfica (Figura 4.21) se tiene:

$$\cos(\alpha) = \frac{\|p_v u\|}{\|u\|} \quad \Rightarrow \quad k = \|p_v u\| = \|u\| \cos(\alpha)$$

Si el ángulo α entre **u** y **v** es menor de 90^0, el vector proyección tiene el mismo sentido del vector **v** , y la constante k es positiva (Figura 4.20 a).

Si el ángulo entre **u** y **v** está entre 90^0 y 180^0, el vector proyección tiene sentido opuesto al vector **v** y la constante k es negativa (Figura 4.20 b).

Definición: Si **u** y **v** son 2 vectores del plano, se define su PRODUCTO ESCALAR como el producto de las normas por el coseno del ángulo entre los dos vectores:

$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = \|u\|\cdot\|v\| \cos(\alpha)$ donde α es el ángulo entre los 2 vectores.

Esta definición es válida para cualquier par de vectores:

- Si **u** y **v** son paralelos y del mismo sentido $\alpha=0^0$, entonces:
  $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = \|u\|\cdot\|v\| \cos 0^0 = \|u\|\cdot\|v\|$.

- Si **u** y **v** son paralelos y de diferente sentido $\alpha=180^0$, entonces:
  $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = \|u\|\cdot\|v\|\cos 180^0 = \|u\|\cdot\|v\|(-1) = -\|u\|\cdot\|v\|$.

- Si **u** y **v** no son paralelos los valores posibles para cos α están entre -1 y 1.

De las anteriores apreciaciones se concluye:

Teorema (Desigualdad de Cauchy-Schwarz).

Para cualquier par de vectores **u** y **v** en el plano $|\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}| \leq \|u\|\cdot\|v\|$.

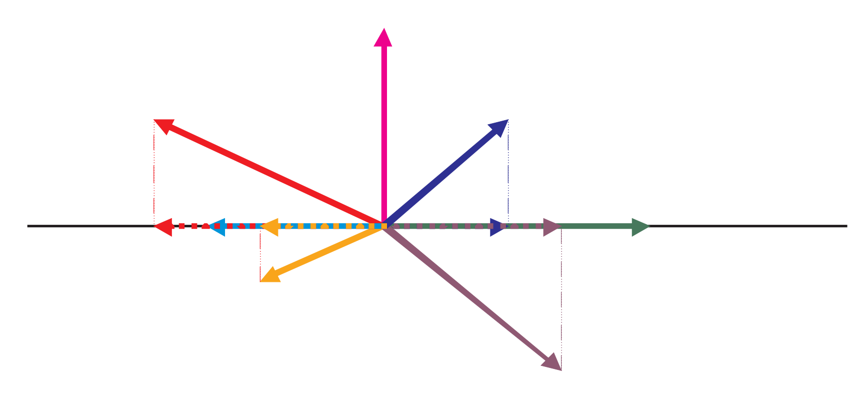


Fig. 4.22.

Geométricamente, la proyección ortogonal (perpendicular) de un vector sobre una recta, siempre tiene longitud menor que el vector (ver figura 4.22). Por tanto, el producto escalar de

2 vectores, en valor absoluto, siempre es menor o igual que el producto de las normas.

De la definición del producto escalar como: **u•v** = $\|u\|\cdot\|v\|$ · cos(α) , donde α es el ángulo entre los vectores, se deduce que : cos(α) = $\dfrac{u \bullet v}{\|u\|\cdot\|v\|}$.

Definición: Se define el COSENO del ángulo α entre los vectores **u** y **v** , como el producto escalar de sus vectores normados.

Se denota: cos(α) = $\dfrac{u \bullet v}{\|u\|\cdot\|v\|} = \dfrac{u}{\|u\|} \bullet \dfrac{v}{\|v\|}$

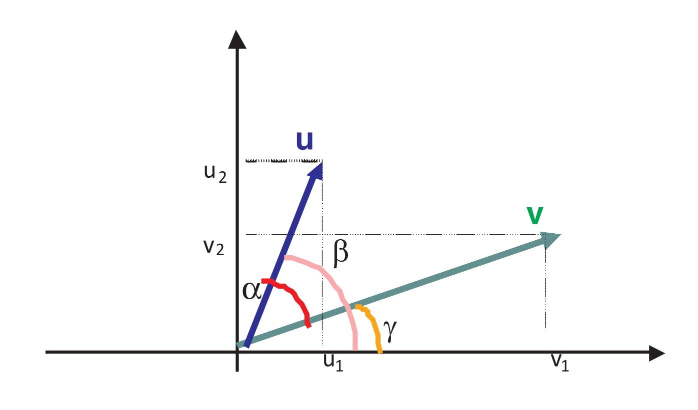


Fig. 4.23.

Si β y γ son los ángulos direccionales de **u** y **v** respectivamente, el ángulo α entre **u** y **v** es $\alpha = \beta - \gamma$ (figura 4.23). Por tanto:

cos(α) = cos(β − γ) = cos β cos γ + sen β sen γ .

Por otra parte, se definió $\dfrac{u}{\|u\|} = \left(\dfrac{u_1}{\|u\|}, \dfrac{u_2}{\|u\|}\right) = (\cos\beta\ , sen\beta\ )$ y

$$\dfrac{v}{\|v\|} = \left(\dfrac{v_1}{\|v\|}, \dfrac{v_2}{\|v\|}\right) = (\cos\gamma\ , sen\gamma\ )$$

Si se hacen las sustituciones correspondientes en la definición cos(α) = $\dfrac{u \bullet v}{\|u\|\cdot\|v\|}$

se tiene:

$\cos(\alpha) = \cos\beta\ \cos\gamma\ + \text{sen}\,\beta\ \text{sen}\,\gamma\ = \dfrac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|}$.

$$\Downarrow$$

$$\frac{u_1}{\|u\|} \bullet \frac{v_1}{\|v\|} + \frac{u_2}{\|u\|} \bullet \frac{v_2}{\|v\|} = \frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|} \Rightarrow \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

$\Rightarrow\ u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = u \bullet v$ es otra definición para el producto escalar.

Definición: Sean **u** y **v** vectores en $\Re^2$, tales que **u** = (u_1, u_2) y **v** = (v_1, v_2) ,se define el PRODUCTO ESCALAR entre **u** y **v** como la suma de los productos de las respectivas coordenadas:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2.$$

Ejemplos:

1. Si **u** = (-1, 1) y v = (2, -1) hallar:

a) El producto escalar entre **u** y **v.**

Solución: $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = -2 - 1 = -3.$

b) El ángulo α entre **u** y **v.**

Solución: $\cos(\alpha) = \dfrac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|} \Rightarrow \cos(\alpha) = \dfrac{-2-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{-3}{\sqrt{10}}$

$$\|u\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad ; \quad \|v\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

Entonces $\alpha = \text{arccos}\left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right) = 166{,}34^0$

c) Graficar la proyección del vector **u** sobre el vector **v** (Figura 4.25)

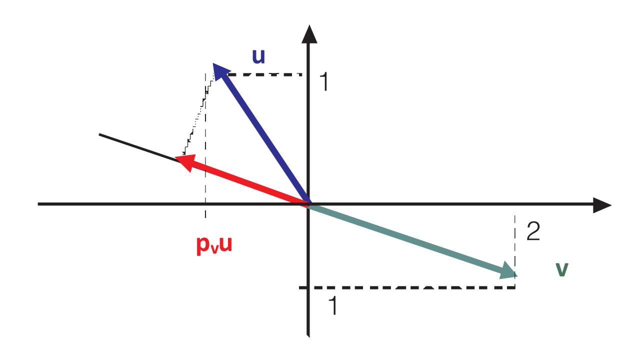


Fig. 4.25.

d) Hallar el vector proyección de **u** sobre **v** ($\mathbf{p_v u}$) y el vector proyección de **v** sobre **u** ($\mathbf{p_u u}$).

Solución: De la definición de $\mathbf{p_v u} = k \dfrac{v}{\|v\|}$, teniendo en cuenta que

$$k = \|u\| \cdot \cos(\alpha) \text{ y } \cos(\alpha) = \frac{u}{\|u\|} \bullet \frac{v}{\|v\|} \text{ , se concluye:}$$

$$\mathbf{p_v u} = k \frac{v}{\|v\|} = \|u\| \cdot \cos(\alpha) \frac{v}{\|v\|} = \|u\| \left(\frac{u}{\|u\|} \bullet \frac{v}{\|v\|} \right) \frac{v}{\|v\|} \Rightarrow \boxed{\mathbf{p_v u} = \frac{u \bullet v}{\|v\|^2} \mathbf{v}}$$

En forma análoga se define el vector proyección de **v** sobre **u**:

$$\mathbf{P_u v} = k \frac{u}{\|u\|} = \|v\| \cdot \cos(\alpha) \frac{u}{\|u\|} = \|v\| \cdot \left(\frac{v}{\|v\|} \bullet \frac{u}{\|u\|} \right) \frac{u}{\|u\|} \Rightarrow \boxed{\mathbf{p_v u} = \frac{v \bullet u}{\|u\|^2} \mathbf{u}}$$

Como **u** = (-1, 1) y **v** = (2, -1) , entonces:

$$\mathbf{p_v u} = \frac{(-1)\cdot 2 + 1\cdot(-1)}{(\sqrt{2^2 + (-1)^2})^2} (2, -1) = \frac{-3}{5} (2, -1) = \left(-\frac{6}{5}, \frac{3}{5} \right)$$

$$\mathbf{P_u v} = \frac{2\cdot(-1) + (-1)\cdot 1}{(\sqrt{(-1)^2 + 1^2})^2} (-1, 1) = \frac{-3}{2} (-1, 1) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right)$$

2. Graficar los vectores **u** = (1, 3) ; **v** = (-2, 0) ; **w** = (1, 2) ; **z** = (-2 ,2/3) y

hallar las coordenadas de: a) $\mathbf{p_v w}$ b) $\mathbf{p_w u}$ c) $\mathbf{p_v z}$ d) $\mathbf{p_z u}$ e) $\mathbf{p_w v}$

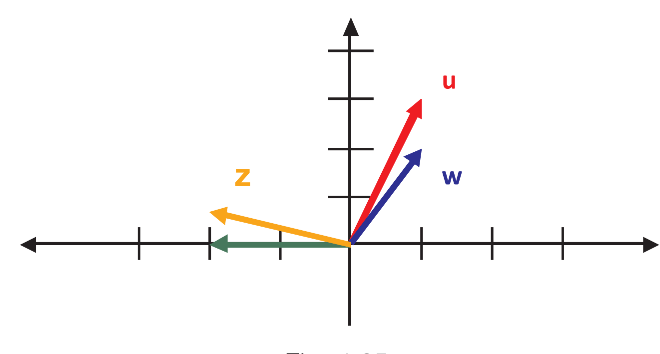


Fig. 4.25.

a) $\mathbf{p_v w} = \dfrac{w \bullet v}{\|v\|^2} \mathbf{v} = \dfrac{(1,2)\bullet(-2,0)}{\left(\sqrt{(-2)^2 + 0^2}\right)^2} (-2,0) = \dfrac{-2}{4} (-2,0) = -\dfrac{1}{2} (-2, 0) = (1, 0)$

b) $\mathbf{p_w u} = \dfrac{u \bullet w}{\|w\|^2}\,\mathbf{w} = \dfrac{(1,3)\bullet(1,2)}{\left(\sqrt{1^2+2^2}\right)^2}(1,2) = \dfrac{7}{5}(1,2) = \left(\dfrac{7}{5},\dfrac{14}{5}\right)$

c) $\mathbf{p_v z} = \dfrac{z \bullet v}{\|v\|^2}\,\mathbf{v} = \dfrac{(-2,2/3)\bullet(-2,0)}{\left(\sqrt{(-2)^2+0^2}\right)^2}(-2,0) = \dfrac{4}{4}(-2,0) = (-2\,,0)$

d) $\mathbf{p_z u} = \dfrac{u \bullet z}{\|z\|^2}\,\mathbf{z} = \dfrac{(1,3)\bullet(-2,2/3)}{\left(\sqrt{(-2)^2+(2/3)^2}\right)^2}(-2,2/3) = \dfrac{0}{4+4/9}(-2,2/3) = (0\,,0)$

e) $\mathbf{p_w v} = \dfrac{v \bullet w}{\|w\|^2}\,\mathbf{w} = \dfrac{(-2,0)\bullet(1,2)}{\left(\sqrt{1^2+2^2}\right)^2}(1,2) = \dfrac{-2}{5}(1,2) = \left(-\dfrac{2}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$

Propiedades del producto escalar:

1. u•v = v•u

Demostración: Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$,entonces:

$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = (u_1, u_2)\bullet(v_1, v_2)$ definición de vector en $\Re^2$.
$= u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$ definición de producto escalar .
$= v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2$. es conmutativa en $\Re$.
$= (v_1, v_2)\bullet(u_1, u_{22})$ definición del producto escalar.
$= \mathbf{v}\bullet\mathbf{u}$ definición de vector en $\Re^2$.

Verificación: Si **u** = (2,-2) y **v** = (3,1) ,entonces:

u•v = (2,-2)•(3,1) = 2 · 3 + (-2) · 1 = 6 – 2 = 4
v•u = (3,1)•(2,-2) = 3 · 2 + 1 · (-2) = 6 – 2 = 4

2. [r **u**]**v = u•**[r **v**] = r[**u•v**]

Demostración: Se deja como ejercicio al lector.

Verificación: Si r = 3, **u** = (2, -2) y **v** = (3, 1)
[r **u**]**v** = [3 (2, -2)]•(3, 1) = (6, -6)•(3, 1) = 18 – 6 = 12

$\mathbf{u}\bullet[r\,\mathbf{v}] = (2, -2)\bullet[3\,(3, 1)] = (2, -2)\bullet(9, 3) = 18 - 6 = 12$

$r[\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}] = 3[(2, -2)\bullet(3, 1)] = 3[6 - 2] = 3 \cdot 4 = 12$

3. $\mathbf{u}\bullet[\mathbf{v} + \mathbf{w}] = \mathbf{u}\bullet\mathbf{v} + \mathbf{u}\bullet\mathbf{w}$

Demostración: Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}\bullet[\mathbf{v} + \mathbf{w}] &= (u_1, u_2)\bullet[(v_1, v_2) + (w_1, w_2)] \\
&= (u_1, u_2)\bullet(v_1 + w_1\,,\, v_2 + w_2) \\
&= u_1[v_1 + w_1] + u_2[v_2 + w_2] \\
&= u_1 \cdot v_1 + u_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot v_2 + u_2 \cdot w_2 \\
&= [u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2] + [u_1 \cdot w_1 + u_2 \cdot w_2] \\
&= \mathbf{u}\bullet\mathbf{v} + \mathbf{u}\bullet\mathbf{w}
\end{aligned}$$

Verificación: Si $\mathbf{u} = (1, 2)$, $\mathbf{v} = (-2, 3)$ y $\mathbf{w} = (3, -5)$,entonces:

$$\mathbf{u}\bullet[\mathbf{v} + \mathbf{w}] = \mathbf{u}\bullet\mathbf{v} + \mathbf{u}\bullet\mathbf{w}$$
$$(1, 2)\bullet[(-2, 3) + (3, -5)] = (1, 2)\bullet(-2, 3) + (1, 2)\bullet(3, -5)$$
$$(1, 2)\bullet(1, -2) = [-2 + 6] + [3 - 10]$$
$$1 - 4 = 4 - 7$$
$$-3 = -3$$

4. $\mathbf{u}\bullet\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2 \geq 0$ y $\mathbf{u}\bullet\mathbf{u} = 0$ si y solo si $\mathbf{u} = \mathbf{o}$

Demostración: Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$,entonces:

$$\mathbf{u}\bullet\mathbf{u} = (u_1, u_2)\bullet(u_1, u_2) = u_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot u_2 = u_1^2 + u_2^2$$

Como $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2}} \Rightarrow \|\mathbf{u}\|^2 = \left(\sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2}}\right)^2 = u_1^{\,2} + u_2^{\,2} = \mathbf{u}\bullet\mathbf{u}$

De esta propiedad, se concluye que el producto escalar de cualquier vector con si mismo, da como resultado la norma del vector al cuadrado.

Verificación: Si $\mathbf{u} = (-3, 4) \Rightarrow \|\mathbf{u}\| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \|\mathbf{u}\|^2 = 25$

Además, $\mathbf{u}\bullet\mathbf{u} = (-3, 4)\bullet(-3, 4) = (-3)\cdot(-3) + 4 \cdot 4 = 9+16 = 25$

Teorema: El producto escalar de dos vectores **u** y **v** en $\Re^2$ es cero, si y solamente si, alguno de los vectores es el vector nulo o si los vectores son ortogonales.

$$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} = \mathbf{o} \quad \text{o} \quad \mathbf{v} = \mathbf{o} \quad \text{o} \quad \mathbf{u}\perp\mathbf{v}$$

Demostración:

Si alguno de los vectores es el vector nulo: **u** = (0, 0) o **v** = (0, 0) , entonces por definición **u•v** = 0.

Si **u⊥v** el ángulo entre **u** y **v** es 90^0 y aplicando la primera definición del producto escalar se tiene:

$$\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos 90^0 = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot 0 = 0 .$$

Porque el coseno de 90^0 es cero y el producto de cualquier número con cero es cero.

Ejercicios resueltos:

1. Decidir si los siguientes pares de vectores son o no ortogonales:

a) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{4}{3}\mathbf{j}$.

b) $\mathbf{z} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

Solución:

a) Expresamos los vectores en términos de sus coordenadas:

$$\mathbf{u} = (2, -1) \text{ y } \mathbf{v} = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \Rightarrow \mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = 2\cdot\frac{2}{3} + (-1)\cdot\frac{4}{3} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0$$

Como el producto escalar de los vectores es cero, se concluye que los vectores son ortogonales.

b) **z** = (1, 1) y **w** = (-1, 2) ⇒ **z•w** = -1 + 2 = 1. Como el producto escalar es diferente de cero, los vectores no son perpendiculares.

2. Demuestre que los vectores i y j de la base canónica, son ortogonales.

Solución:

i = (1, 0) y **j** = (0, 1) $\Rightarrow$ **i•j** $= 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$. Luego **i•j** = 0 $\Rightarrow$ **i**$\perp$**j**

Nota: Como los vectores **i** y **j** son normados (de longitud 1) y ortogonales, se dice que {**i**, **j**} es la BASE ORTONORMADA del plano cartesiano.

3. Encuentre un vector **x** que sea unitario y ortogonal al vector **z** = 4**i** + 3**j**.

Solución:

Supongamos que **x** = (a, b) , entonces se debe cumplir **z•x** = 0.

z•x = (4, 3)•(a, b) = 4 · a + 3 · b = 0 $\Rightarrow$ $b = -\dfrac{4}{3}\ a$.

$b = -\dfrac{4}{3}\ a$ significa que hay muchas opciones, una para cada valor de a:

si a = 3 ,entonces : b = -4 y **y** = (3, -4).

Pero el vector y no es unitario, por lo que se calcula $\|\ \text{y}\ \| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

Aplicando la definición de vector normado se tiene que: **x** = $\dfrac{y}{\|y\|}$, entonces:

x = $\left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$ es un vector unitario y perpendicular a **z**.

4. Se tienen 3 vectores no nulos **a , b** y **c** del plano $\Re^2$. Si el ángulo que forman **a** y **c** es igual al ángulo que forman **b** y **c**, demuestre que el vector **c** es ortogonal al vector **v** = ‖ **a** ‖ **b** - ‖ **b** ‖ **a**.

Demostración:

Si α es el ángulo entre **a** y **c** ,entonces : $\cos\alpha = \dfrac{a \bullet c}{\|a\|\cdot\|c\|}$.

Como el ángulo entre **b** y **c** es igual a α ,entonces : $\cos\alpha = \dfrac{b \bullet c}{\|b\|\cdot\|c\|}$.

De las dos igualdades se concluye:

$$\frac{a \bullet c}{\|a\| \cdot \|c\|} = \frac{b \bullet c}{\|b\| \cdot \|c\|} \quad \Rightarrow \quad \frac{a \bullet c}{\|a\|} = \frac{b \bullet c}{\|b\|}$$

$\Rightarrow \|b\| \cdot \mathbf{a} \bullet \mathbf{c} = \|a\| \cdot \mathbf{b} \bullet \mathbf{c}$

$\Rightarrow \|b\| \cdot \mathbf{a} \bullet \mathbf{c} - \|a\| \cdot \mathbf{b} \bullet \mathbf{c} = 0$

$\Rightarrow [\|b\| \cdot \mathbf{a} - \|a\| \cdot \mathbf{b}] \bullet \mathbf{c} = 0$

$\Rightarrow \mathbf{v} \bullet \mathbf{c} = 0$

$\Rightarrow \mathbf{v} \perp \mathbf{c}$

Teorema: (Desigualdad Triangular).

Dados dos vectores **u** y **v** del plano, $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Demostración: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{u} + \mathbf{v})$.

$= \mathbf{u} \bullet \mathbf{u} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{v} \bullet \mathbf{u} + \mathbf{v} \bullet \mathbf{v}$.

$= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\mathbf{u} \bullet \mathrm{v} + \|\mathbf{v}\|^2$.

$= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos\alpha + \|\mathbf{v}\|^2$.

$\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2$ $\quad (|\cos\alpha| < 1)$

$\leq (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$.

Como: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 \leq (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2 \Rightarrow \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Interpretación geométrica (de la desigualdad triangular):

Dados 3 puntos del plano, se pueden definir 3 vectores de los cuales, uno de ellos es la suma de los otros 2.

Si los 3 puntos están alineados, los vectores son paralelos y se cumple la igualdad (ver Figura 4.26 a).

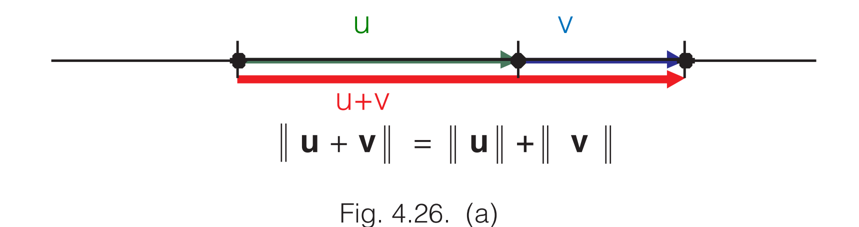


Fig. 4.26. (a)

Si los puntos no están alineados, los vectores no son paralelos y al sumarlos se forma un triángulo, para el cual la suma de las longitudes de 2 de sus lados, siempre es mayor que la longitud del otro lado. (Figura 4.26 b)

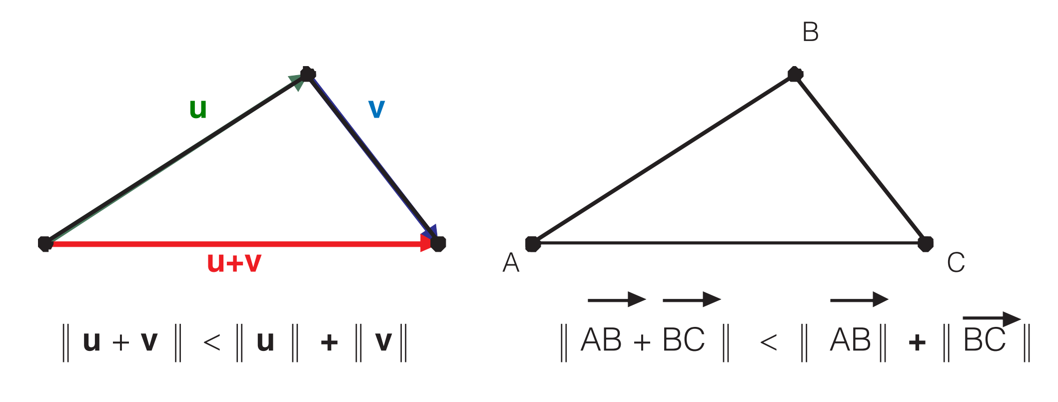


Fig. 4.26. (b)

Ejercicios propuestos:

1. Encuentre el ángulo α entre los vectores **u** y **v** si:
a) **u** = (1, 2) y **v** = (6,8) . b) **u** = (-7, -3) y **v** = (0, 1).

2. Encuentre el vector proyección de **w** sobre **z** y la componente de w sobre **z** si:
a) **w** = (2, 1) y **z** = (-3, 2) . b) **w** = (2, 6) y **z** = (-9, 3).

3. Si **a** = (2, -3) encuentre un vector **b** $\in \Re^2$, tal que **b•a** = 0 y ‖ **a** ‖ = ‖ **b** ‖ .

4. Demuestre que si **u** y **v** son vectores ortogonales, entonces: $\| \mathbf{u}+\mathbf{v} \|^2 = \| \mathbf{u}-\mathbf{v} \|^2$

4.1.3. Aplicaciones de los vectores en $\Re^2$

PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

Dados **u** y **v** $\in \Re^2$, entonces:
u$||$**v** (**u** es **PARALELO** a **v**) si existe un escalar k tal que: **v** = k**u** o **u** =k**v**
u$\perp$**v** (**u** es **PERPENDICULAR** a **v**) si **u•v** = 0

Ejercicios resueltos:

1. Encuentre un vector **x** de longitud 2 en la dirección del vector **v** = (-1, 2).

Solución: Supongamos que el vector es: **x** = (a , b).

Las condiciones dadas son: $\| \mathbf{x} \| = 2$ y **x** = k **v.**

Si $\| \mathbf{x} \| = 2 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4$ (1)

Si **x** = k **v** $\Rightarrow$ (a , b) = (-k , 2k) $\Rightarrow$ a = -k y b = 2k (2)

Remplazando las condiciones de la ecuación (2) en la ecuación (1) ,tenemos:

$(-k)^2 + (2k)^2 = 4 \Rightarrow k^2 + 4k^2 = 4 \Rightarrow 5k^2 = 4 \Rightarrow k^2 = 4/5$

$$\Rightarrow \quad k = \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Remplazando estos valores de k en la ecuación (2) se tiene:

Si $a = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow b = -\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ y si $a = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow b = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

Esto significa que hay dos soluciones posibles, los vectores:

$\mathbf{x} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$ y $\mathbf{x} = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$ satisfacen las dos condiciones requeridas.

2. Si **u** = -2**i** +5**j** y **v** = c**i** – 2**j** encuentre valores de la constante c para que:

a) $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ b) $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$

Solución: $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 5j \Rightarrow \mathbf{u} = (-2, 5)$
$\mathbf{v} = c\mathbf{i} - 2j \Rightarrow \mathbf{v} = (c, -2)$

a) Si $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ existe una constante k tal que $(c, -2) = k(-2, 5)$.
Entonces: $c = -2k$ y $-2 = 5k \Rightarrow k = -2/5$ y $c = 4/5$

Por tanto, para que el vector **v** sea paralelo al vector **u** c es 4/5.

b) Si $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, entonces, $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$.
$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = (-2, 5) \bullet (c, -2) = (-2).c + 5 \cdot (-2) = -2c - 10 = 0 \Rightarrow c = -5$.

Por tanto, el vector $\mathbf{v} = (-5, -2)$ es ortogonal a **u**.

3. Si **u** y **v** son vectores en el plano, demostrar cada una de las siguientes afirmaciones y dar una interpretación geométrica:

a) Si $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$,entonces: $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ y $(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ son ortogonales.

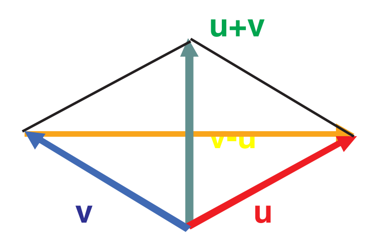
Demostración: Si $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \perp (\mathbf{u} + \mathbf{v})$,entonces, $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 0$.

$(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{u} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} - \mathbf{v} \bullet \mathbf{u} + \mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$

Pero $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| \Rightarrow \|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \Rightarrow \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 = 0$

Luego $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 0$ y $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ y $(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ son ortogonales.

Interpretación geométrica:



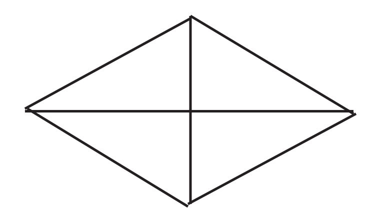


Fig. 4.27. (a)

En un rombo, todos los lados tienen la misma longitud y las dos diagonales son perpendiculares entre sí. (Figura 4.27 a)

b) Dos vectores u y v son ortogonale,s si y solo si, $\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \| = \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|$.

Demostración: $\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \| = \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \| \Leftrightarrow \| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|^2 = \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|^2$

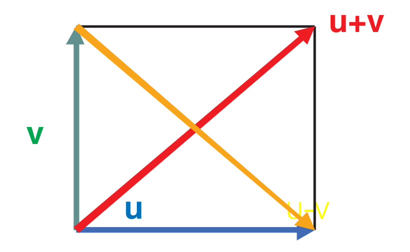
$$\Leftrightarrow (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{u} - v) \bullet (\mathbf{u} - \mathbf{v}).$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{u} \bullet \mathbf{u} + 2\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u} \bullet \mathbf{u} - 2\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{v} \bullet \mathbf{v}.$$

$$\Leftrightarrow 2\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = -2\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} \Leftrightarrow 4\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \perp \mathbf{v}.$$

Interpretación geométrica:

En un cuadrado las dos diagonales tienen la misma longitud (Figura 4.27 b).



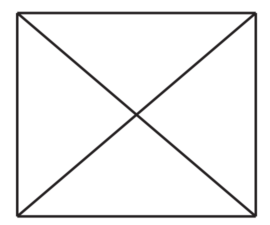


Fig. 4.27. (b)

PROYECCIONES ORTOGONALES – TRABAJO:

Dados dos vectores **u** y **v** en $\Re^2$,se definió el vector proyección de **u** sobre **v** como $\mathbf{p_v u} = \frac{u \bullet v}{\|v\|^2} \mathbf{v}$; geométricamente se obtiene completando un triángulo rectángulo en el cual, el vector **u** es la hipotenusa y el vector proyección $\mathbf{p_v u}$ es el cateto adyacente al ángulo α entre los dos vectores (ver figura 4.21).

Las aplicaciones más usuales del producto escalar y en particular, del vector proyección se presentan en física, al calcular el trabajo efectuado por una fuerza constante en una dirección determinada, o para calcular las condiciones de equilibrio de un objeto.

- Si a un objeto se le aplica una fuerza **F** en la dirección **d** del desplazamiento ocasionado, se realiza un trabajo físico W definido como: $W = \|\mathbf{F}\| \cdot \|\mathbf{d}\|$ (Figura 4.28 a)

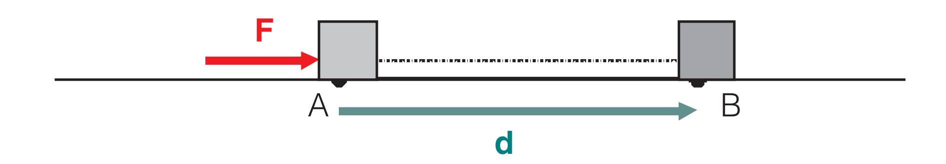


Fig. 4.28. (a)

- Si la fuerza F se aplica en una dirección diferente a la del desplazamiento, el trabajo queda determinado por la componente de **F** en la dirección del desplazamiento, es decir , $W = \|\mathbf{F}\| \cdot \|\mathbf{d}\| \cos\alpha = \mathbf{F} \bullet \mathbf{d}$ (Figura 4.28 b).

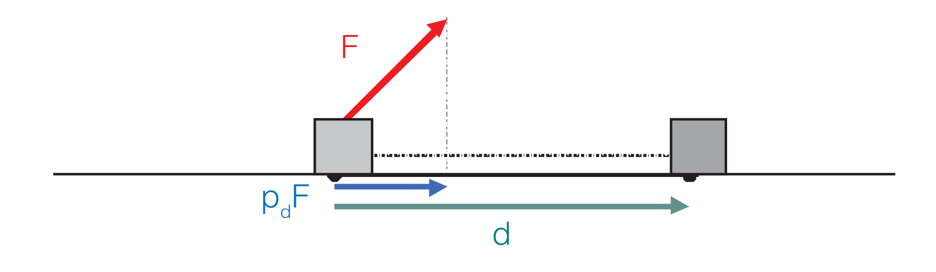


Fig. 4.28. (b)

Ejemplo:

a) Calcular el trabajo efectuado por una fuerza constante F = -2i + 6j cuando su punto de aplicación se desplaza del punto A:(-2 , 3) al punto B:(-1 , 6).

Solución: $\mathbf{F} = -2i + 6j \Rightarrow \mathbf{F} = (-2 , 6)$.

$$\mathbf{d} = AB = \mathbf{B} - A \Rightarrow \mathbf{d} = (-1 , 6) - (-2 , 3) = (1 , 3).$$

Entonces: $W = (-2 , 6) \bullet (1 , 3) = -2 + 18 = 16.$

Si la fuerza **F** está dada en Newtons y la distancia en metros, el trabajo realizado por dicha fuerza es 16 Newtons por metro.

b) Graficar los vectores F y d (Figura 4.29) y calcular el ángulo de desviación de la fuerza aplicada, en relación a la dirección del desplazamiento.

Solución:

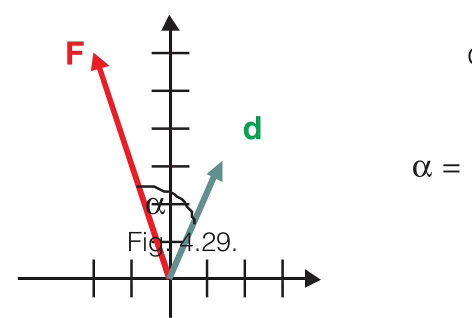


Fig. 4.29.

$$\cos\alpha = \frac{d \bullet F}{\|d\| \cdot \|F\|} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{d \bullet F}{\|d\| \cdot \|F\|}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{16}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{40}}\right) = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) = 36{,}87^0$$

La fuerza F se aplica con un ángulo de $36{,}87^0$ respecto a la trayectoria del desplazamiento.

- Sobre un cuerpo en un plano inclinado actúan varias fuerzas: el peso **P** del objeto, la fuerza **F** sobre el objeto y la reacción **R** del plano inclinado. Para que este sistema permanezca en equilibrio, la fuerza resultante que actúa sobre el sistema debe ser cero, es decir:
P + **F** + **R** = **O** (Figura 4.30)

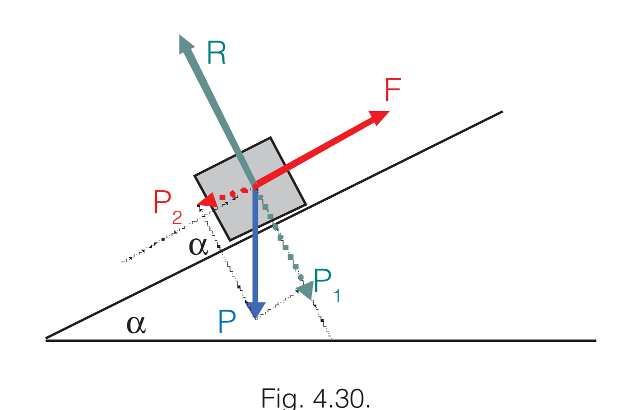


Fig. 4.30.

$\mathbf{P} + \mathbf{F} + \mathbf{R} = \mathbf{O}$ pero

$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ además

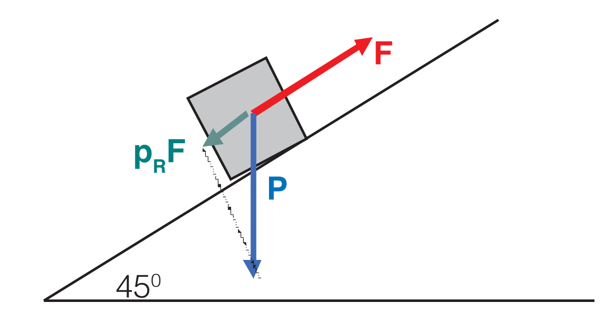
$\mathbf{P}_1 = \mathbf{p_R P} = \|\mathbf{P}\| \operatorname{sen}\alpha$

$\mathbf{P}_2 = \mathbf{p_R P} = \|\mathbf{P}\| \cos\alpha$

Ejemplo:

Calcule la fuerza que se debe aplicar para equilibrar un objeto que pesa 25 libras y se encuentra sobre un plano con una inclinación de 45^0 .

Solución:



$$-F = p_R P \Rightarrow \|F\| = \|p_R P\|$$

$$\Rightarrow \|p_R P\| = \|P\| \cos 45^0$$

$$\Rightarrow \|F\| = 25 \cos 45^0 = \frac{25}{\sqrt{2}}$$

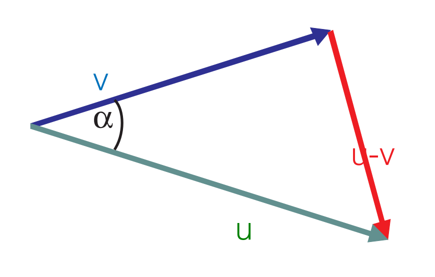
$$\Rightarrow \|F\| = \frac{25}{\sqrt{2}} \approx 17{,}68$$

Por tanto, se debe aplicar una fuerza de 17,68 libras para equilibrar el sistema.

TEOREMA DEL COSENO

Teorema: Si **u** y **v** son vectores en $\Re^2$,entonces:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos\alpha$$



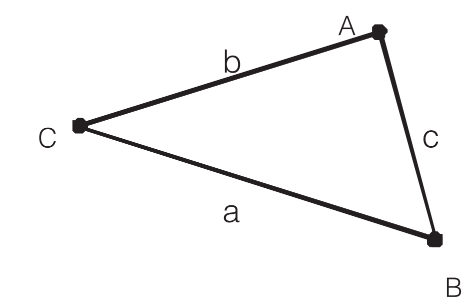


Fig. 4.31.

Demostración:

$$\|u - v\|^2 = (u - v) \bullet (u - v)$$

$$= u \bullet u - 2u \bullet v + v \bullet v$$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\| \cdot \|v\| \cos\alpha$$

Sobre el triángulo ABC se tiene:

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{CB}\|^2 + \|\overrightarrow{CA}\|^2 - 2\|\overrightarrow{CB}\| \cdot \|\overrightarrow{CA}\| \cos C$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$ **(Teorema del Coseno)**

Si el ángulo en C es de 90^0 se tiene:

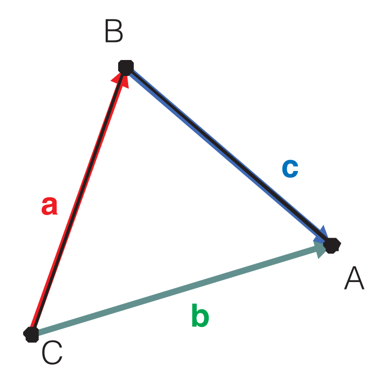
$$c^2 = a^2 + b^2$$ **(Teorema de Pitágoras)**

Si $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, entonces , $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$

Ejemplos:

1. Hallar los ángulos del triángulo definido por los vectores **a** , **b** y **c**, cuyas normas son 4, 5 y 6 respectivamente. ¿Puede ser rectángulo el triángulo?

Solución:



Si $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ tenemos:

$$\|\mathbf{c}\|^2 = \|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}\|^2 - 2\|\mathbf{b}\| \cdot \|\mathbf{a}\| \cos\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{\|b\|^2 + \|a\|^2 - \|c\|^2}{2\|b\| \cdot \|a\|} = \frac{5^2 + 4^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{8}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{8}\right) = 82{,}8^0 = C$$

Si $\mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$,entonces: $\|\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - 2\|\mathbf{b}\| \cdot \|\mathbf{c}\| \cos A$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{\|b\|^2 + \|c\|^2 - \|a\|^2}{2\|b\| \cdot \|c\|} = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{3}{4} \Rightarrow A = \arccos\left(\frac{3}{4}\right) = 41{,}4^0$$

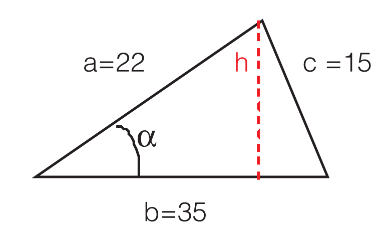
Para calcular el ángulo en B, se puede volver a aplicar el teorema del coseno considerando **b** = **c** – **a** , o por diferencia de ángulos, dado que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180^0

Entonces: $B = 180^0 - (A + C) = 180^0 - (82{,}8^0 + 41{,}4^0) \Rightarrow B = 55{,}8^0$

El triángulo no es rectángulo porque ninguno de los ángulos es de 90^0.

2. ¿Es posible tener un terreno de forma triangular, con linderos de 22, 15 y 35 metros?. Si es posible, calcular su área.

Solución:
Podemos verificar que la longitud de cualquiera de los linderos es menor que la suma de los otros dos: 22+15 = 37; 22+35 = 57; 15+35 = 50. Entonces, por la desigualdad triangular, podemos concluir que si es posible delimitar un terreno triangular con esas dimensiones. Para calcular el área, primero se calcula la altura del triángulo desde cualquiera de los ángulos, y cualquier ángulo se puede calcular con el teorema del coseno, porque se conocen las longitudes de los 3 lados:



Si $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\alpha$ donde

α es el ángulo en C .

entonces: $\cos\alpha = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

$\cos\alpha = \dfrac{1484}{1540} = 0{,}9636 \Rightarrow \alpha = \arccos(0{,}9636) = 15{,}5^0$

Ahora podemos calcular la altura $h = a.\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow h = 22.\operatorname{sen}15.5^0 = 0{,}27$.

Por tanto: $A = \dfrac{1}{2}b.h = \dfrac{1}{2}\,35(0{,}27) = 4{,}72$

El área del triángulo es 4,72 metros cuadrados.

Autoevaluación:

En cada caso seleccione la respuesta correcta:

1. Las coordenadas del vector con punto inicial en P: (1, -4) y punto terminal en Q: (-2, 3) son:

a) (-1, -1) . **b)** (-3, -7) . **c)** (-3, 7) . **d)** (1, 1).

2. La norma del vector $\left(-\dfrac{3}{2}, \sqrt{2}\right)$ es:

a) $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$. **b)** $\dfrac{17}{4}$. **c)** $\dfrac{5}{2}$. **d)** $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

3. Si **u** = 4**i** – 3**j** y **v** = 2**i** + **j** entonces el vector proyección de **v** sobre **u** es:

a) (4, -3) . **b)** (4/5, -3/5) . **c)** (-4, 3) . **d)** (-4/5, 3/5).

4. Un vector **u** tal que (3, 1) + 2**u** = (6, 4) – **u** es:

a) (1, 1). **b)** (3, 3) . **c)** (-1, -1) . **d)** (-3, -3).

5. No es posible tener un triángulo cuyos lados midan:

a) 3, 5, 7. **b)** 13, 11, 9 . **c)** 8, 10, 17 . **d)** 12, 4, 6.

Decidir en cada caso si la afirmación es verdadera o falsa, justificando la respuesta:

6. Si el producto interno de dos vectores es cero, necesariamente los vectores son ortogonales.

7. Dados **u**, **v** y **w** vectores del plano. tales que **u** es ortogonal a **w** y a su vez **w** es ortogonal a **v**, entonces **u** y **v** son linealmente dependientes.

8. El teorema del coseno es un caso particular del teorema de Pitágoras.

9. Si dos vectores son paralelos. uno de ellos debe ser múltiplo escalar del otro.

10. Dos vectores linealmente independientes siempre son ortogonales.

4.2. VECTORES EN $\Re^3$

Los vectores en el espacio tridimensional $\Re^3$ tienen las mismas características de los vectores en el plano $\Re^2$: magnitud, dirección y sentido. Además, tienen comportamientos análogos, es decir, se definen las mismas operaciones (suma, multiplicación escalar y producto escalar) con las mismas propiedades e interpretaciones geométricas. En $\Re^3$ se definen otras dos operaciones llamadas "producto vectorial" y "producto mixto" las cuales son estudiadas detalladamente en esta sección.

4.2.1. Características de los vectores en $\Re^3$

Al igual que en el plano, los vectores en el espacio son segmentos de recta orientados con dos formas de representación: en el espacio geométrico como "vectores libres" (Figura 4.33 a) o en el espacio cartesiano como "vectores ligados" (Figura 4.33 b).

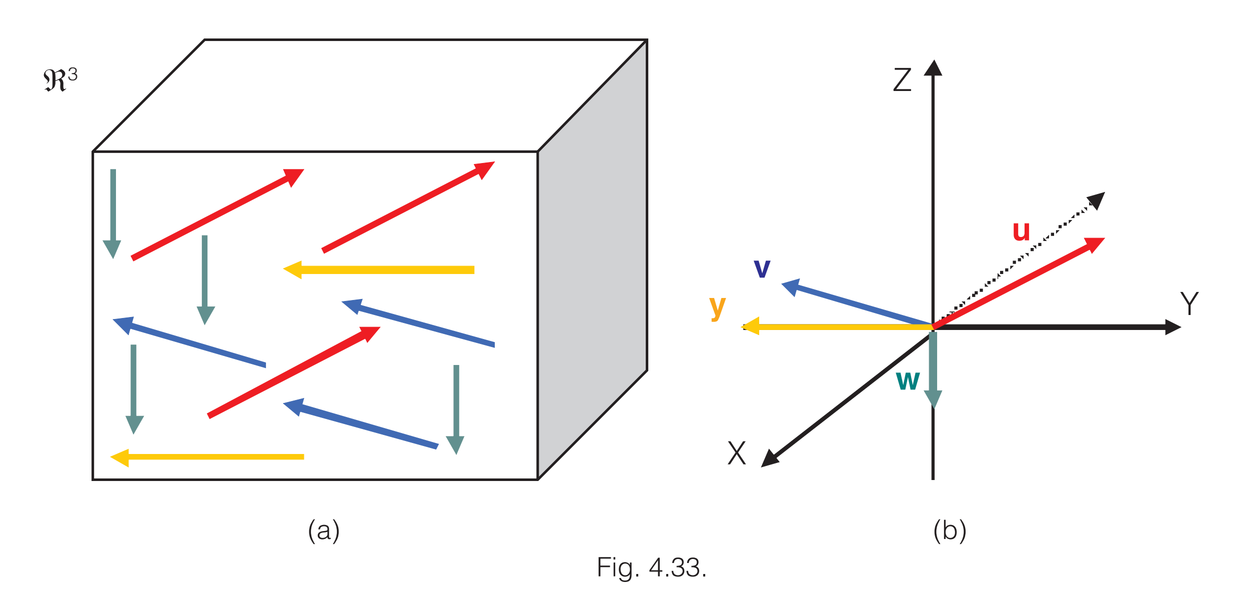
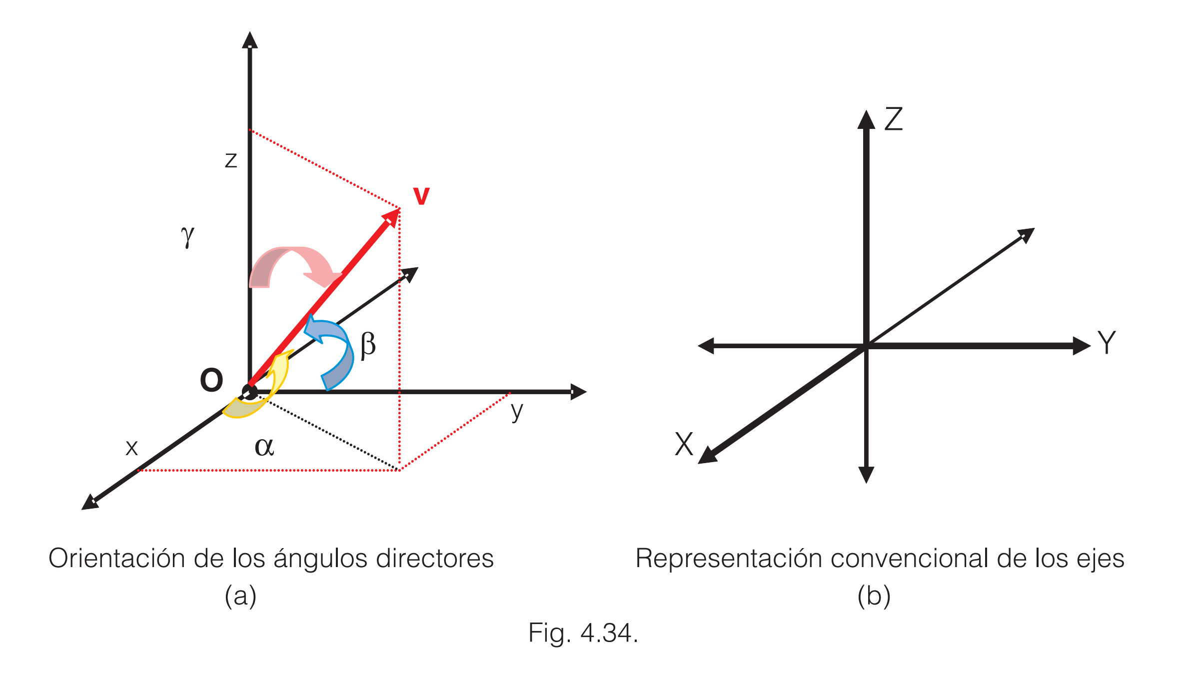


Fig. 4.33.

Podemos asumir que cada "terna ordenada" (x, y, z), es decir, cada punto del espacio tridimensional representa un vector.

Definición: Un vector v en $\Re^3$ queda definido por **v** = (x, y, z) donde x, y, z son las COORDENADAS CARTESIANAS. Los ángulos α, β y γ se llaman ANGULOS DIRECTORES y son los que forma el vector **v** con los ejes X, Y y Z respectivamente; considerando el sentido positivo desde la parte positiva del eje hacia el vector. (Figura 4.34 a)



Orientación de los ángulos directores
(a)

Representación convencional de los ejes
(b)

Fig. 4.34.

Antes de continuar , veamos algunos casos especiales de vectores en $\Re^3$:

En la representación geométrica de $\Re^3$ se consideran 3 rectas X, Y y Z perpendiculares entre sí, llamadas EJES COORDENADOS (Figura 4.34 b).

Puntos de $\Re^3$ que estén sobre estos ejes tienen coordenadas de la forma:
(x, 0, 0) sobre el eje X ; $(0, y, 0)$ sobre el eje Y y $(0, 0, z)$ sobre el eje Z.

Cada par de ejes define un plano, por tanto, se tienen 3 PLANOS COORDENADOS: XY, XZ y YZ según el par de rectas que los definen.

Puntos de $\Re^3$ que estén sobre estos planos tienen coordenadas de la forma:
$(x, y, 0)$ en el plano XY ; $(x, 0, z)$ en el plano XZ y $(0, y, z)$ en el plano YZ.

Los tres planos coordenados dividen el espacio tridimensional en 8 regiones llamadas OCTANTES.

Ejemplos:

1. Hacer la representación gráfica de cada uno de los siguientes vectores:

a = (2, 0, 0) ; **b** = (0, -2, 0) ; **c** = (0, 0, 3) (sobre los ejes coordenados)
d = (2, 2, 0) ; **e** = (-2, 0, 3) ; **f** = (0, 3, -1) (sobre los planos coordenados)
g = (2, 4, 4) ; **h** = (1, 2, -2)

Solución: Representación gráfica de los vectores (Figura 4.35).

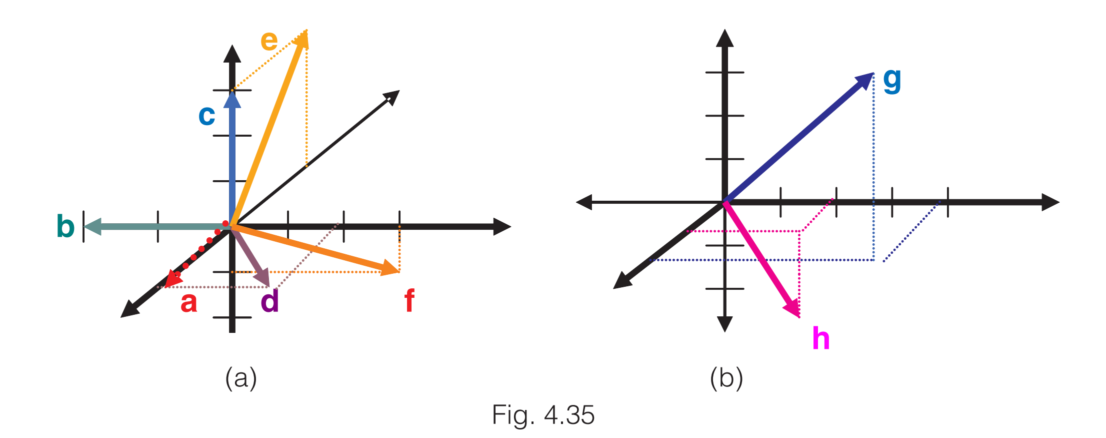


Fig. 4.35

Para representar un vector sobre alguno de los planos coordenados, se dibuja un paralelogramo en el correspondiente plano, de acuerdo a las coordenadas del vector (Figura 4.35 a).

Para representar un vector con sus tres componentes diferentes de cero, primero se completa el paralelogramo que corresponda sobre el plano XY y se desplaza el punto paralelamente al eje Z, en el sentido que determine la tercera componente según sea positiva o negativa (Figura 4.35 b).

2. Dibujar un cubo cuya arista mida 3 unidades, con uno de su vértices en el punto (1, 2, 1), y completamente contenido en el primer octante (las 3 componentes positivas). Marque los vértices y escriba las coordenadas de cada uno de ellos.

Solución: (Figura 4.36)

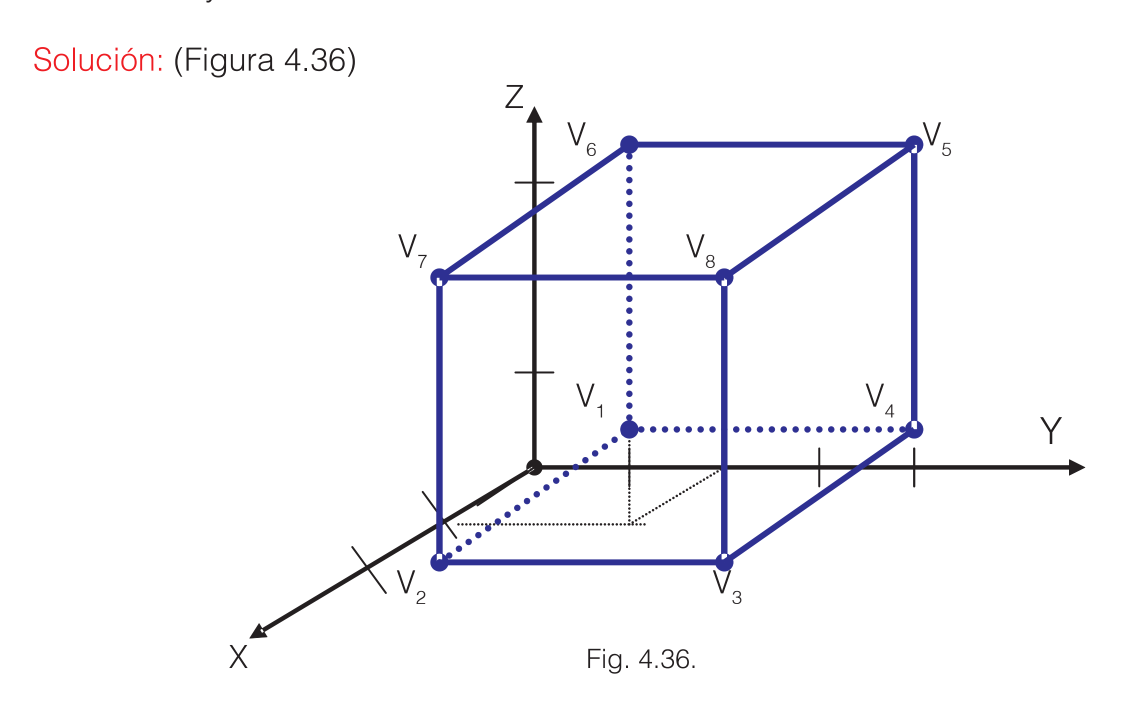


Fig. 4.36.

Coordenadas de los vértices: $V_1 = (1, 2, 1)$; $V_2 = (4, 2, 1)$; $V_3 = (4, 5, 1)$,

$V_4 = (1, 5, 1)$; $V_5 = (1, 5, 4)$; $V_6 = (1, 2, 4)$; $V_7 = (4, 2, 4)$; $V_8 = (4, 5, 4)$

Ejercicio propuesto

Si no se hace la aclaración de que el cubo está en el primer octante, hay 7 posibilidades más. Repita el ejercicio anterior para 2 de esas opciones. Haga el gráfico que ilustre las 8 posibilidades.

Definiciones: Si $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \Re^3$ se define:

NORMA de **v**: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

VECTOR NORMADO de v: $\dfrac{v}{\|v\|} = \left(\dfrac{x}{\|v\|}, \dfrac{y}{\|v\|}, \dfrac{z}{\|v\|}\right)$.

Los vectores normados sobre los ejes coordenados son:
i = (1, 0, 0) en el eje X.
j = (0, 1, 0) en el eje Y.
k = (0, 0, 1) en el eje Z.

COSENOS DIRECTORES de v: $\cos\alpha = \dfrac{x}{\|v\|}$, $\cos\beta = \dfrac{y}{\|v\|}$, $\cos\gamma = \dfrac{z}{\|v\|}$

De los cosenos directores se deducen los ÁNGULOS DIRECTORES:
(Figura 4.34 a)

$\alpha = \arccos\left(\dfrac{x}{\|v\|}\right)$ ángulo que forma el vector con el eje X.

$\beta = \arccos\left(\dfrac{y}{\|v\|}\right)$ ángulo que forma el vector con el eje Y.

$\gamma = \arccos\left(\dfrac{z}{\|v\|}\right)$ ángulo que forma el vector con el eje Z.

Observe que los cosenos directores son las componentes del vector normado.

Teorema: La suma de los cuadrados de los cosenos directores es 1.

$$\left(\frac{x}{\|v\|}\right)^2 + \left(\frac{y}{\|v\|}\right)^2 + \left(\frac{z}{\|v\|}\right)^2 = 1$$

Ejemplos:

1. Encuentre los ángulos directores del vector **v** = (-3, 1, 2).

Solución: Si v = (-3, 1, 2) entonces $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$.

Por tanto, $\frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right)$ y en consecuencia:

$$\cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{14}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{14}}\right) = 180^0 - 36.7^0 = 143{,}3^0$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{14}} \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) = 74{,}5^0$$

$$\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{14}} \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) = 57{,}7^0$$

El vector **v** = (-3, 1, 2) forma ángulos de $143{,}3^0$ con el eje X, de $74{,}5^0$ con el eje Y y de $57{,}7^0$ con el eje Z.

2. Si los vectores directores del vector **u** son iguales y están entre 0^0 y 90^0, encuentre las coordenadas del vector **u** cuya norma es 6.

Solución: Si **u** = (x, y, z) , entonces:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\|u\|} \Rightarrow x = \|\mathbf{u}\| \cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\|u\|} \Rightarrow y = \|\mathbf{u}\| \cos\beta$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\|u\|} \Rightarrow z = \|\mathbf{u}\| \cos\gamma$$

Pero $\alpha = \beta = \gamma$,entonces: $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$. Por tanto: $x = y = z$

Además: $(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1$

$$\Rightarrow \quad 3(\cos\alpha)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Por tanto, el vector **u** tiene coordenadas $\left(\frac{6}{\sqrt{3}}, \frac{6}{\sqrt{3}}, \frac{6}{\sqrt{3}}\right) = \left(2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right)$.

3. Demuestre que no existe un vector unitario, cuyos ángulos directores sean $\pi/6$, $\pi/3$, y $\pi/4$

Demostración: Si α, β y γ son los ángulos directores de un vector en $\Re^3$, la suma de los cuadrados de los respectivos cosenos directores debe ser 1.

Pero: $\cos(\pi/3) = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$

$\cos(\pi/6) = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(\pi/4) = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Entonces:

$$(\cos 30^0)^2 + (\cos 60^0)^2 + (\cos 45^0)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \neq 1$$

Por tanto, 30^0, 60^0 y 45^0 no pueden ser ángulos directores de ningún vector.

Ejercicios propuestos:

1. Dibuje un sistema de coordenadas para:

a) Localice los puntos de coordenadas: (2, 3, 4) ; (2, -3, 4) ; (-2, -3, -4) y (0, 0, 3) .

b) Dibuje los vectores de coordenadas: (2, 3, 4) ; (2, -3, 4) ; (-2, -3, -4) y (0, 0, 3) .

2. Determine las componentes del vector que tiene su punto inicial (cola) en P, y su punto terminal (cola) en Q. Grafique los vectores.

a) P: (6, 5, 8) ; Q: (-8, 1, -3) b) P: (2, -1, 4) ; Q: (0, 6, -3)

3. Dados los vectores de coordenadas: (6, -1, 0) y (1, 1, 1) halle para cada uno

a) La norma. b) Los cosenos directores. c) Un vector unitario en sentido opuesto.

4.2.2. Operaciones con vectores en $\Re^3$

Se definen las operaciones de suma, multiplicación escalar y producto escalar en forma análoga a las definidas en $\Re^2$, conservando las mismas propiedades e interpretaciones geométricas.

Se define además, una nueva operación llamada "producto vectorial" porque el resultado es un vector, con aplicaciones muy conocidas en física como el cálculo del "momento de una fuerza" respecto a un punto.

La combinación del producto escalar con el producto vectorial define otra operación en $\Re^3$ llamada "producto mixto".

SUMA: Es una operación definida entre 2 vectores y el resultado es un vector.

Definición: Si **u** y **v** $\in \Re^3$, **u** $= (x_1, y_1, z_1)$ y **v** $= (x_2, y_2, z_2)$ se define

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1+x_2\ ,\ y_1+y_2\ ,\ z_1+z_2) = (w_1, w_2, w_3) = \mathbf{w} \in \Re^3$$

Propiedades:

1. Conmutativa: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.

2. Asociativa: $[\,\mathbf{u} + \mathbf{v}\,] + \mathbf{w} = \mathbf{u} + [\,\mathbf{v} + \mathbf{w}\,] = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$.

3. Modulativa: $\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u} = \mathbf{o} + \mathbf{u}$, $\mathbf{o} = (0, 0, 0)$ es el VECTOR NULO en $\Re^3$.

4. Invertiva: $\mathbf{u} + [-\mathbf{u}] = \mathbf{o} = [-\mathbf{u}] + \mathbf{u}$
$-\mathbf{u} = (-x, -y, -z)$ es el VECTOR OPUESTO de $\mathbf{u} = (x, y, z)$.

Definición: Si A y B son dos puntos en $\Re^3$ de coordenadas (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) respectivamente, se define el vector $\overrightarrow{AB}$ como:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = (\ b_1-a_1\ ,\ b_2-a_2\ ,\ b_3-a_3\ ).$$

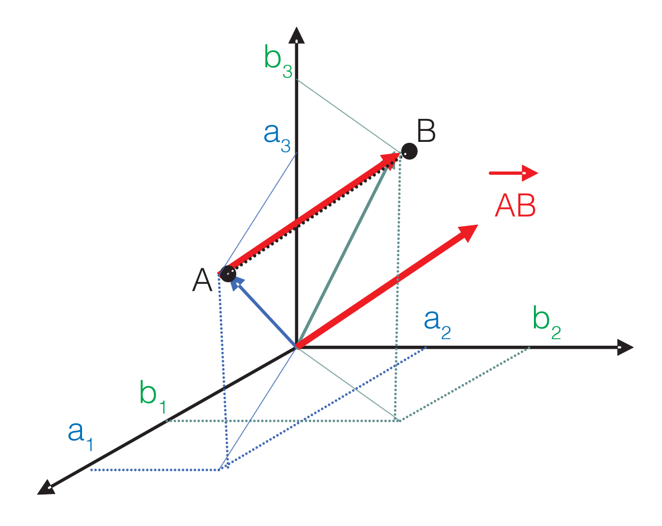


Fig. 4.37.

MULTIPLICACIÓN ESCALAR: Es una operación definida entre un real (escalar) y un vector y el resultado es un vector.

Definición: Dados $r \in \Re$ y $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \Re^3$, se define:

$$r\,\mathbf{v} = (r.x\ ,\ r.y\ ,\ r.z) = (w_1\ ,\ w_2\ ,\ w_3) = \mathbf{w} \in \Re^3$$

Se dice que **w** es MÚLTIPLO ESCALAR de **v**, es decir, existe un real r , tal que **w** = r**v**.

También se dice que **v** y **w** son vectores LINEALMENTE DEPENDIENTES o PARALELOS, es decir, que se encuentran sobre la misma recta o sobre rectas paralelas.

Propiedades:

1. $\forall\ \mathbf{v} \in \Re^3$: $1\,\mathbf{v} = \mathbf{v}$ y $0\,\mathbf{v} = \mathbf{o}$.
2. $\forall\ r, s \in \Re$ y $\forall\ \mathbf{v} \in \Re^3$: $r.[\,s\,\mathbf{v}\,] = [\,r.s\,]\,\mathbf{v}$.
3. $\forall\ r, s \in \Re$ y $\forall\ \mathbf{v} \in \Re^3$: $[\,r + s\,]\,\mathbf{v} = r\,\mathbf{v} + s\,\mathbf{v}$.
4. $\forall\ r \in \Re$ y $\forall\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Re^3$: $r\,[\,\mathbf{u} + \mathbf{v}\,] = r\,\mathbf{u} + r\,\mathbf{v}$.

Teorema: Dados **i** = (1, 0, 0), **j** = (0, 1, 0) y **k** = (0, 0, 1), los 3 vectores unitarios en $\Re^3$ sobre los ejes coordenados X, Y y Z respectivamente, todo vector **v** $\in \Re^3$ se puede expresar en forma única, como COMBINACIÓN LINEAL (C.L.) de los vectores **i** , **j** y **k** , es decir, si **v** = (v_1, v_2, v_3) entonces **v** = v_1**i** + v_2**j** + v_3**k**.

Los 3 vectores **i** , **j** y k son LINEALMENTE INDEPENDIENTES (L. I.), porque ninguno de ellos es combinación lineal de los otros dos, por tanto, {**i**, **j**, **k**} es la BASE CANÓNICA o NATURAL de $\Re^3$.

Nota: Al igual que en $\Re^2$, en $\Re^3$ todo vector **v** queda definido de dos formas: por sus coordenadas **v** = (v_1, v_2, v_3) ,o , como combinación lineal de los vectores de la base canónica **v** = v_1**i** + v_2**j** + v_3**k**.

Ejemplos:

1. Dados los vectores **u** = (-1, 0, 2) y **v** = (2, 4, 3):

a) Expresar **u** y v en términos de la base canónica y hallar **u** + **v**:

Solución: **u** = (-1, 0, 2) = (-1) **i** + 0 **j** + 2 k = -**i** + 2**k**.

v = (2, 4, 3) = 2 **i** + 4 **j** + 3 k = 2**i** + 4**j** + 3**k** .

u + **v** = [-1+2] **i** + [0+4] **j** + [2+3] k = **i** + 4**j** + 5**k**.

b) Hallar las coordenadas de un vector **x** tal que 2**u** + **x** = **v**.

Solución: 2**u** + **x** = **v** $\Rightarrow$ **x** = **v** – 2**u**.

x = (2, 4, 3) + [-2] (-1, 0, 2).

x = (2, 4, 3) + (2, 0, -4) .

x = (4, 4, -1).

c) Graficar los vectores

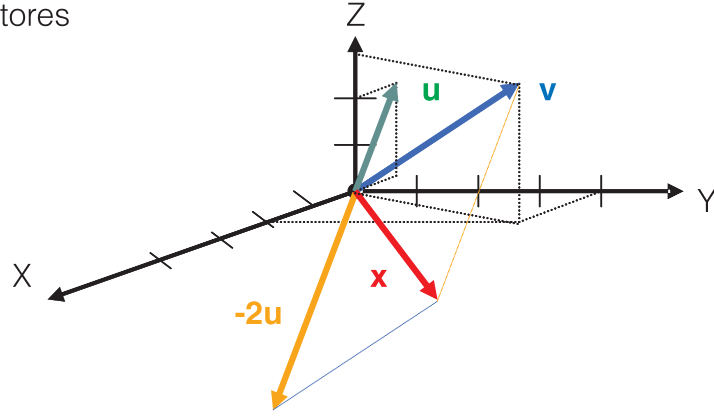


Fig. 4.38

2. Hallar un vector **y** de longitud 2, que sea paralelo al vector **w** = (1, 2, -3) .

Solución: Como **y**$\|$**w** , entonces existe una constante c tal que **y** = c**w**.

Si **y** = (x, y, z) $\Rightarrow$ (x, y, z) = c (1, 2, -3)

$\Rightarrow$ x = c, y = 2c , z = -3c

Como $\|$ **y** $\|$ = 2 , entonces: $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ = 2 $\Rightarrow$ $\sqrt{c^2+(2c)^2+(-3c)^2}$ = 2

$\Rightarrow$ $\sqrt{14c^2}$ = 2

$\Rightarrow$ c = $2/\sqrt{14}$

Por tanto, el vector **y** tiene coordenadas $\left(2/\sqrt{14}\,, 4/\sqrt{14}\,, -6/\sqrt{14}\right)$.

PRODUCTO ESCALAR: Es una operación definida entre 2 vectores y el resultado es un real (escalar).

Definición: Dados **u** y **v** $\in\Re^3$, si **u** = (u_1, u_2, u_3) y **v** = (v_1, v_2, v_3),

se define el PRODUCTO ESCALAR, **u•v** = $u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3$ = r$\in\Re$

Definición: Dados dos vectores **u** y **v** en $\Re^3$, se define el COSENO DEL ÁNGULO α entre **u** y **v** como el producto escalar entre los vectores normados de **u** y **v** .

$$\cos\alpha = \frac{u}{\|u\|} \bullet \frac{v}{\|v\|} = \frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

Lo mismo que en $\Re^2$, de esta definición se deduce otra forma para el producto escalar:

Definición: Dados 2 vectores **u**, **v** $\in \Re^3$ se define el PRODUCTO ESCALAR

entre **u** y **v** como $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos\alpha$.

Propiedades

1. $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$.

2. $[\, r\,\mathbf{u}\,] \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u} \bullet [\, r\,\mathbf{v}\,] = r\,[\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}]$, $\forall\, r \in \Re$.

3. $\mathbf{u} \bullet (\, \mathbf{v} + w\,) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet w$.

4. $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2 > 0$ si $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, pero $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = 0$ si $\mathbf{u} = \mathbf{o}$.

5. Si $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$ entonces $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ o $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ o $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. (Perpendicularidad)

6. $|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$. (Desigualdad de Cauchy - Schwarz)

7. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$. (Desigualdad Triangular)

8. $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos\alpha$ (Teorema del Coseno)
, donde α es el ángulo entre los vectores **u** y **v**.

Definición: Dados 2 vectores no paralelos (L.I.) **u** y **v** $\in \Re^3$, se define el VECTOR PROYECCIÓN de **u** sobre **v** como $\mathbf{p_v u} = \dfrac{u \bullet v}{\|v\|^2}\,\mathbf{v}$.

Ejemplos

1. Hallar el ángulo α entre los vectores **u** = **i** + 4**j** – **k** y **v** = **j** – **k**.

Solución: **u** = **i** + 4**j** – **k** $\Rightarrow$ **u** = (1, 4, -1) $\Rightarrow$ $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2+4^2+(-1)^2} = \sqrt{18}$

v = **j** – **k** $\Rightarrow$ **v** = (0, 1, -1) $\Rightarrow$ $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{0^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

Además, **u•v** = (1, 4, -1)•(0, 1, -1) = $1\cdot 0 + 4\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)$ = 5

Como $\cos\alpha = \dfrac{u \bullet v}{\|u\|\cdot\|v\|}$ $\Rightarrow$ $\cos\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{36}} = \dfrac{5}{6}$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{5}{6}\right) \approx 33{,}56^0.$$

Por tanto, el ángulo entre los vectores **u** y **v** es $33{,}56^0$

2. Hallar valores de la constante c para que **u** = (2, 2, 1) y **v** = (3, 1, c):
a) sean paralelos. b) sean ortogonales. c) formen un ángulo de 75^0.

Solución:

a) Si **u**| |**v** debe existir una constante h tal que **u** = h**v** , entonces:

(2, 2, 1) = h(3, 1, c) de donde se concluye: 2 = h y 2 = 3.h $\Rightarrow$ h = $\dfrac{2}{3}$

Como se tienen dos valores diferentes de la constante h para el mismo vector, se concluye que no es posible hallar un valor de la constante h para que los vectores **u** y **v** sean paralelos.

b) Si **u**$\perp$**v** , entonces: **u•v** = 0 $\Rightarrow$ (2, 2, 1)•(3, 1, c) = 6 + 2 + c = 0 $\Rightarrow$ c = -8.

Por tanto, los vectores **u** y **v** son ortogonales si c = -8.

c) Si **u** y **v** forman un ángulo de 75^0, como $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos\alpha$, entonces:

$$6 + 2 + c = \sqrt{2^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2+c^2}\ \cos(75^0)$$

$$\Downarrow$$

$$8 + c = 3\sqrt{10+c^2}\ \cos(75^0)$$

$$\Downarrow$$

$$(8 + c)^2 = (3\sqrt{10+c^2}\ \cos(75^0))^2$$

$$\Downarrow$$

$$64 + 16.c + c^2 = 9.(10 + c^2).0{,}067$$

$$\Downarrow$$

$$64 + 16.c + c^2 = (90 + 9c^2).0{,}067$$

$$\Downarrow$$

$$0{,}4c^2 + 16c + 58 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$c = \frac{-16\pm\sqrt{16^2-4\cdot 0{,}4\cdot 58}}{2\cdot 0{,}4} \approx \frac{-16\pm\sqrt{163{,}2}}{0{,}8} \approx \frac{-16\pm 12{,}78}{0{,}8}$$

Por tanto, existen 2 valores de la constante c para los cuales los vectores **u** y **v** forman un ángulo de 75^0: $c \approx -36$ y $c \approx -4$.

3. Dados **u**, **v** y **w** vectores en $\Re^3$ tales que: $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{o}$; $\|\mathbf{u}\| = 5$; $\|\mathbf{v}\| = 6$ y $\|\mathbf{w}\| = 7$, calcular : $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}$.

Solución: Como $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{o}$, podemos aplicar el teorema del coseno:

Asumiendo que $\|\mathbf{u}\| = a$, $\|\mathbf{v}\| = b$ y $\|\mathbf{w}\| = c$ (Figura 4.39) se tiene:

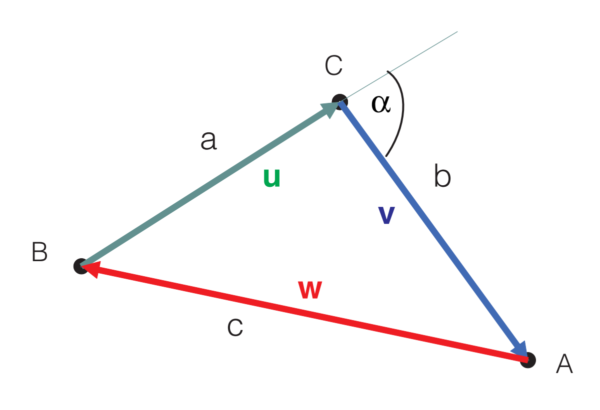


Fig. 4.39.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C \Rightarrow \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$, entonces:

$$\cos C = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad C = \arccos\left(\frac{1}{5}\right) = 78{,}46^0$$

Como el ángulo α entre **u** y **v** es $180^0 - C = 180^0 - 78{,}46^0 = 101{,}54^0 = \alpha$

Entonces: **u•v** = $\| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \| \cos\alpha \Rightarrow$ **u•v** = $5 \cdot 6 \cdot \cos(101{,}54^0) \approx -6$

Por tanto, el producto escalar entre **u** y **v** es –6.

Ejercicios propuestos:

1. Dados los vectores **u** = (2, 4, -7); **v** = (2, 6, 3) y **w** = (3, 4, -5) calcule:

a) [**u•v**] **w**. b) **u•**[**v** + **w**]. c) [**u** + **v**]•w . d) [**v•w**] **u** . e) $\dfrac{1}{v \bullet w}$ **u**.

2. Si **a** = (2, -1, 2) y **b** = (1, 2, -2) ,encuentre **u** y **v** $\in \Re^3$ tales que:
a = **u** + **v**, **u**| |**b** y **v**⊥**b**

3. Halle los cosenos de los ángulos interiores del triángulo, cuyos vértices son:
A: (1, 3, 4); B: (3, -1, 4) y C: (-2, 3, 4)

PRODUCTO VECTORIAL: Es una operación definida entre 2 vectores de $\Re^3$ y el resultado es un vector de $\Re^3$. Si se tienen dos vectores **u** y **v** en $\Re^3$ que sean linealmente independientes, éstos generan un plano. Con el producto vectorial se pretende obtener un vector que sea perpendicular a dicho plano, es decir, que sea ortogonal a **u** y **v** simultáneamente.

Definición: Dados 2 vectores en $\Re^3$, **u** $= (u_1, u_2, u_3)$ y **v** $= (v_1, v_2, v_3)$ se define el PRODUCTO VECTORIAL o PRODUCTO CRUZ de **u** y **v** como:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2 \ , \ u_3v_1 - u_1v_3 \ , \ u_1v_2 - u_2v_1) = \mathbf{w} \in \Re^3$$

Este vector también queda definido por:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \mathbf{w}$$

Nota: Resolviendo el determinante por la primera fila, se tiene el vector de la primera definición. (Compruébelo)

Interpretación geométrica: Dos vectores **u** y **v** en $\Re^3$ linealmente independientes, generan un plano. El producto cruz entre ellos es un vector ortogonal o normal a dicho plano (Figura 4.40).

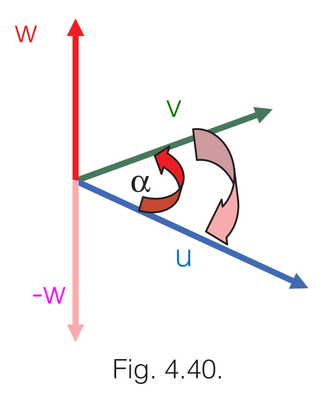


Fig. 4.40.

w = **u**x**v** tiene sentido positivo porque el ángulo α entre **u** y **v** es positivo .

-**w** = **v**x**u** tiene sentido negativo porque el ángulo entre **v** y **u** es -α .

w es ortogonal tanto a **u** como a **v**.

Propiedades:

1. **u** x **v** = – **v** x **u** El producto vectorial no es conmutativo.

Demostración: Si en un determinante se intercambian 2 filas, el determinante cambia de signo, entonces:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = -\,\mathbf{v} \times \mathbf{u}.$$

Verificación: Si $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, se tiene:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 10\mathbf{k}.$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 10\mathbf{k}.$$

Entonces: $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = (2, -4, -10) = -(-2, 4, 10) = -\,\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

2. $\mathbf{u} \times [\,\mathbf{v} + \mathbf{w}\,] = [\,\mathbf{u} \times \mathbf{v}\,] + [\,\mathbf{u} \times \mathbf{w}\,]$ Distribuitividad respecto a la suma
$[\,\mathbf{v} + \mathbf{w}\,] \times \mathbf{u} = [\,\mathbf{v} \times \mathbf{u}\,] + [\,\mathbf{w} \times \mathbf{u}\,]$

Demostración: Se deja como ejercicio al lector.

Verificación: Si $\mathbf{u} = (1, 3, -2)$; $\mathbf{v} = (4, -1, 1)$ y $\mathbf{w} = (0, -2, 1)$, entonces:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (4, -3, 2) \Rightarrow \mathbf{u} \times [\,\mathbf{v} + \mathbf{w}\,] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (0, -10, -15)$$

Además:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -9, -13) \quad \text{y} \quad \mathbf{u} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, -2)$$

Entonces: **u** x [**v** + **w**] = [**u** x **v**] + [**u** x **w**].

$\Downarrow$

(0, -10, -15) = (1, -9, -13) + (-1, -1, -2).

3. Si **u** x **v** = o , entonces : **u** = o o **v** = o o **u**| |**v** .

Demostración: Se sabe que un determinante es igual a cero cuando se tiene al menos una de las siguientes condiciones:

a) Alguna de las filas es de ceros, lo que en este caso significa que alguno de los vectores **u** o **v** es el vector nulo.

b) Una fila es múltiplo de otra, lo que en este caso significa que uno de los vectores es múltiplo escalar del otro, es decir los vectores **u** y **v** son paralelos.

Verificación: Si **u** = (-3, -1, 5), el vector **v** = (6, 2, -10) = -2**u** es paralelo a **u** entonces

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -1 & 5 \\ 6 & 2 & -10 \end{vmatrix} = (0, 0, 0) = \mathrm{o}$$

4. **u** x **u** = o.

Demostración: Como un determinante es igual a cero cuando tiene dos filas iguales, al aplicar la definición a **u** x **u** el resultado es el vector nulo.

5. [r**u**] x **v** = r[**u** x **v**] = **u** x [r**v**] .

Demostración: $$\begin{vmatrix} i & j & k \\ ru_1 & ru_2 & ru_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = r\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ rv_1 & rv_2 & rv_3 \end{vmatrix}$$, entonces:

[r**u**] x **v** = r[**u** x **v**] = **u** x [r**v**]

Verificación: Se deja como ejercicio al estudiante.

Teorema: Si α es el ángulo entre dos vectores **u** y **v** en $\Re^3$, entonces:

$$\| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \| = \| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \| \operatorname{sen}\alpha.$$

Demostración:

$\| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \|^2 = \| \mathbf{u} \|^2 \cdot \| \mathbf{v} \|^2 - [\, \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} \,]^2$	Propiedad producto mixto.
$= \| \mathbf{u} \|^2 \cdot \| \mathbf{v} \|^2 - \| \mathbf{u} \|^2 \cdot \| \mathbf{v} \|^2 \cos^2\alpha$	Definición producto escalar.
$= \| \mathbf{u} \|^2 \cdot \| \mathbf{v} \|^2 (1 - \cos^2\alpha)$	Factorización.
$= \| \mathbf{u} \|^2 \cdot \| \mathbf{v} \|^2 \operatorname{sen}^2\alpha$	Identidad trigonométrica.

Si se toma la raíz cuadrada a los dos lados de la igualdad se tiene:

$$\| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \| = \| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \| \cdot \operatorname{sen}\alpha .$$

Interpretación geométrica: La norma del producto vectorial de 2 vectores de $\Re^3$ representa el área del paralelogramo generado por los vectores. (Figura 4.34)

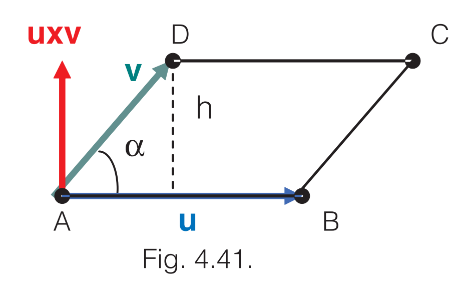


Fig. 4.41.

ABCD paralelogramo definido por los vectores **u** y **v**.

$A_{\square}$: área del paralelogramo.

b: base del paralelogramo.

h: altura del paralelogramo.

$$A_{\square} = b.h \Rightarrow A = \| \mathbf{u} \| .h \quad \text{pero} \quad h = \| \mathbf{v} \| \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow A = \| \mathbf{u} \| . \| \mathbf{v} \| \operatorname{sen}\alpha.$$

Ejemplos:

1. Hallar el área del paralelogramo generado por los vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solución: $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{u} = (2, -1, 1).$
$\mathbf{v} = 2\mathbf{j} - \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{v} = (0, 2, -1).$

Entonces: **u** x **v** = $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ = (-1, 2, 4) $\Rightarrow$ $\|$ **u** x **v** $\|$ = $\sqrt{(-1)^2+2^2+4^2} = \sqrt{21}$

Por tanto, el área del paralelogramo generado por los vectores **u** y **v** es $\sqrt{21}$ unidades cuadradas.

2. Hallar el área del triángulo de vértices en los puntos A: (2, 0, 1) ; B: (1, 3, 2) y C: (3, 2, -1). Dibujar el triángulo. (Figura 4.42)

Solución: Llamaremos **u** = AB = B – A $\Rightarrow$ **u** = (-1, 3, 1).

v = AC = C – A $\Rightarrow$ **v** = (1, 2, -2).

Pero el triángulo ABC es la mitad del paralelogramo ABCD, generado por los vectores **u** y **v**, entonces el área del triángulo, es la mitad del área del paralelogramo.

Como **u** x **v** = $\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ = (-8, -1, -5) , entonces:

$$A = \frac{1}{2}\| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \| = \frac{1}{2}\sqrt{(-8)^2+(-1)^2+(-5)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{90} = \frac{3}{2}\sqrt{10}$$

Por tanto, el área del triángulo ABC es $\frac{3}{2}\sqrt{10}$ unidades cuadradas.

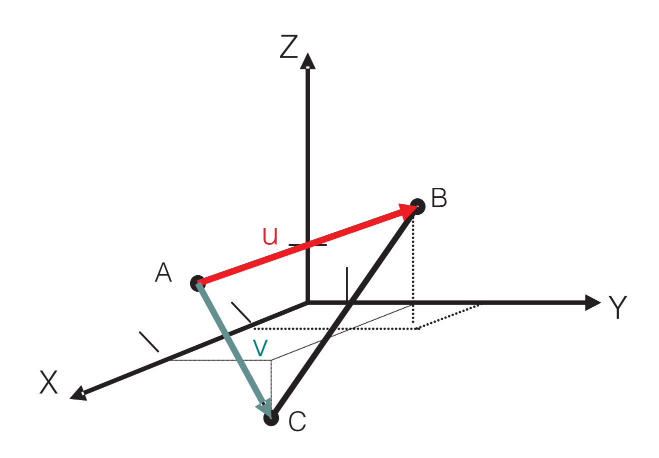


Fig. 4.42.

PRODUCTO MIXTO: También llamado TRIPLE PRODUCTO ESCALAR es una operación definida entre 3 vectores de $\Re^3$ y el resultado es un real.

Definición: Se llama PRODUCTO MIXTO a la combinación del producto vectorial y el producto escalar entre vectores de $\Re^3$. Se denota **u**•[**v** x **w**].

Si **u** = (u_1, u_2, u_3), **v** = (v_1, v_2, v_3) y **w** = (w_1, w_2, w_3) se define:

$$\mathbf{u}\bullet[\,\mathbf{v}\times\mathbf{w}\,] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Interpretación geométrica: Si **u**, **v** y **w** son tres vectores de $\Re^3$ linealmente independientes, es decir los 3 vectores no están sobre el mismo plano, generan un PARALELEPIPEDO (figura 4.43) cuyo volumen queda determinado por el valor absoluto del producto mixto entre los vectores **u**, **v** y **w**.

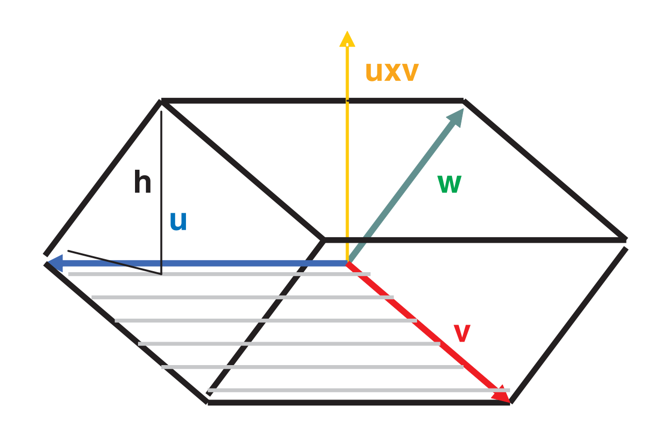


Fig. 4.43.

V: volumen del paralelepípedo.

A: área de la base.

h: altura del paralelepípedo .

V = A.h.

Pero, A = $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$ y h = $\|\mathbf{p}_{\mathbf{uxv}}\mathbf{w}\| = \dfrac{w\bullet[uxv]}{\|uxv\|}$, por tanto, V = **w**•[**u** x **v**]

Propiedades:

1. **u**•[**v** x **w**] = [**u** x **v**]•**w** = **w**•[**u** x **v**].

Demostración: $\mathbf{u}\bullet[\,\mathbf{v} \times \mathbf{w}\,] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

2. $\mathbf{u}\bullet[\,\mathbf{u} \times \mathbf{v}\,] = \mathbf{v}\bullet[\,\mathbf{u} \times \mathbf{v}\,] = 0$; **u** y **v** son ortogonales a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Demostración: $\mathbf{u}\bullet[\,\mathbf{u} \times \mathbf{v}\,] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$ por tener 2 filas iguales.

$\mathbf{v}\bullet[\,\mathbf{u} \times \mathbf{v}\,] = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$ por tener 2 filas iguales.

3. $[\,\mathbf{u} \times \mathbf{v}\,] \times \mathbf{w} = [\,\mathbf{w}\bullet\mathbf{u}]\,\mathbf{v} - [\,\mathbf{w}\bullet v\,]\,\mathbf{u}$ triple producto vectorial .

Demostración: Ejercicio para el lector.

4. $\|\,\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^{2} = \|\,\mathbf{u}\|^{2} \cdot \|\,\mathbf{v}\|^{2} - [\,\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}\,]^2$.

Demostración:

$\|\,\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^{2} = [\,\mathbf{u} \times \mathbf{v}\,]\bullet[\,\mathbf{u} \times \mathbf{v}\,]$	Propiedad del producto escalar .
$= [\,(\,\mathbf{u} \times \mathbf{v}\,) \times \mathbf{u}\,]\bullet\mathbf{v}$	Propiedad 1 del producto mixto.
$= [\,(\,\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}\,)\,\mathbf{v} - (\,\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}\,)\,\mathbf{u}\,]\bullet\mathbf{v}$	Propiedad 3 del producto mixto.
$= [\,\mathbf{u}\bullet\mathbf{u}\,][\,\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}\,] - [\,\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}\,][\,\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}\,]$	Distributividad producto escalar.
$= \|\,\mathbf{u}\|^{2} \cdot \|\,\mathbf{v}\|^{2} - [\,\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}\,]^2$	Propiedad del producto escalar.

Ejemplos:

1. Verificar la propiedad 1 de l producto mixto con los vectores **u** = (3, 1, 0) . **v** = (2, -1, 1) y **w** = (3, 0, 3)

Solución: $\mathbf{u}\bullet[\ \mathbf{v} \times \mathbf{w}\ ] = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 3 + 0 - 0 - 6 - 0 = -12$

$$\mathbf{w}\bullet[\ \mathbf{u} \times \mathbf{v}\ ] = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 0 - 9 - 6 - 0 - 0 = -12$$

2. Encuentre el volumen del paralelepípedo generado por los vectores dados en el ejemplo 1. Grafique el paralelepípedo (Figura 4.44).

Solución:

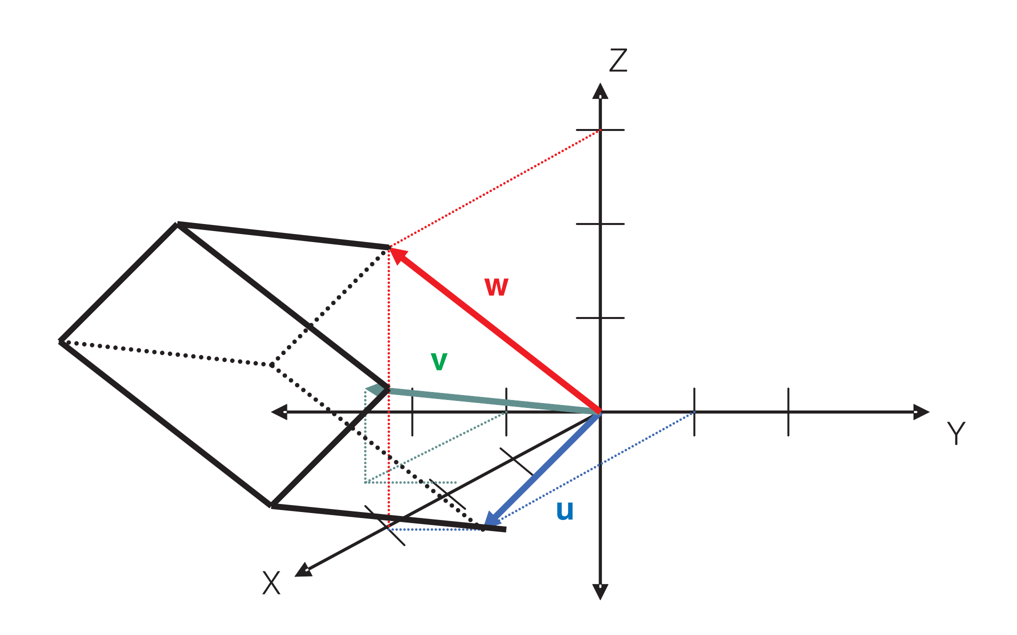


Fig. 4.44.

Volumen: $V = |\ \mathbf{w}\bullet[\ \mathbf{u} \times \mathbf{v}\ ]\ | = |-12| = 12$ unidades cúbicas.

3. Calcular el volumen del tetraedro ABCD de vértices en los puntos: A: (1, 0, 2); B: (3, 1, 1); C: (4, -1, 1) y D: (0, 0, 2). Graficar el tetraedro.

Solución:

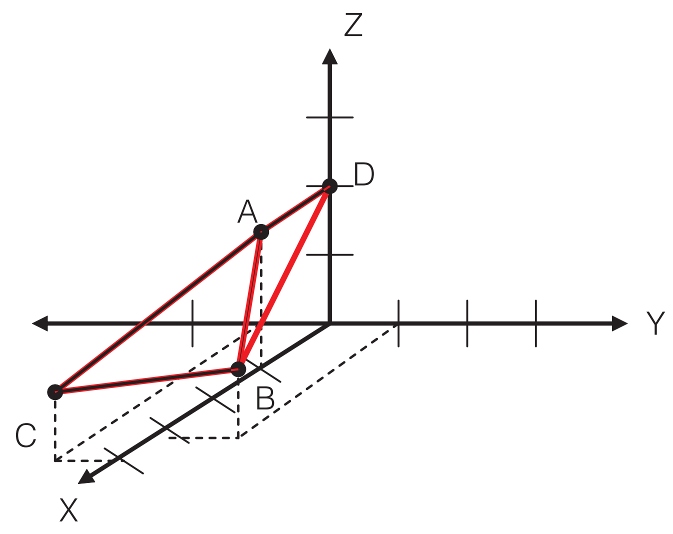


Fig. 4.45.

El volumen de un tetraedro es un tercio del volumen del paralelepípedo, es decir:

Volumen del tetraedro = $\frac{1}{3}$ Área de la base x altura.

La base es un triángulo $\Rightarrow$ Área base = $\frac{1}{2}\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|$

La altura es la del paralelogramo generado por $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$

Entonces: Volumen del tetraedro = $\frac{1}{6}\left| [\, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \,] \bullet \overrightarrow{AD} \right|$

Pero: $\overrightarrow{AB}$ = **B – A** = (2, 1, -1);

$\overrightarrow{AC}$ = **C – A** = (3, -1, -1)

$\overrightarrow{AD}$ = **D – A** = (-1, 0, 0)

Y se tiene: $[\, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \,] \bullet \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \bullet [\, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \,] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$

Por tanto, el volumen del tetraedro es:

$$V = \frac{1}{6}\left| [\, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \,] \bullet \overrightarrow{AD} \right| = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$ unidades cúbicas.

4.2.3. Aplicaciones de los vectores en $\Re^3$

ECUACIONES DE RECTAS EN $\Re^3$:

Por 2 puntos A y B en $\Re^3$ pasa una y sólo una recta, por lo tanto, una condición para poder hallar la ecuación de una recta es conocer 2 de sus puntos. Si sólo se conoce un punto, como por el pasan infinitas rectas, es necesario conocer también la dirección de la recta.

Veremos para cada caso como se define la recta:

Caso 1: Se conoce un punto P: (x_0, y_0, z_0) y un vector **v** = (v_1, v_2, v_3) llamado VECTOR DIRECCIONAL, porque define la dirección de la recta (es paralelo a ella).

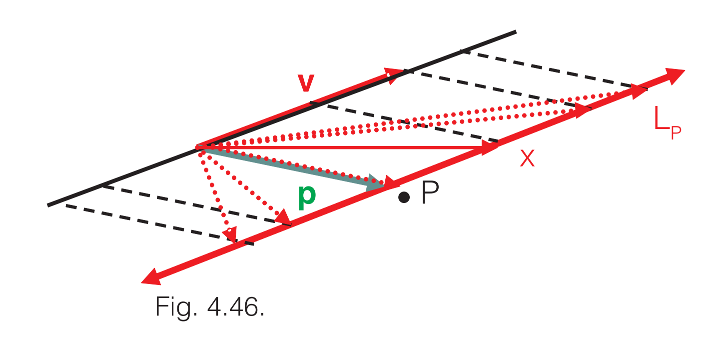


Fig. 4.46.

Si se define el vector **p** del origen del vector **v** al punto P, cualquier vector **x** sobre la recta L_P se puede expresar como la suma de **p** con un múltiplo escalar de **v** (figura 4.46) . Entonces se define:

$L_P = \{\mathbf{x} \in \Re^3 \ / \ \mathbf{x} = \mathbf{p} + r\mathbf{v} \ , \forall r \in \Re\}$

x = **p** + r**v** se llama ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA que pasa por el punto P en la dirección del vector **v**.

Como **x** es cualquier punto de $\Re^3$, **x** = (x, y, z) y la ecuación vectorial toma la forma:

Ecuación Vectorial: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + r(v_1, v_2, v_3)$ (E. V.)

Efectuando la multiplicación escalar y la suma e igualando componentes, se tienen las llamadas ECUACIONES PARAMÉTRICAS de la recta con “parámetro” r.

Ecuaciones paramétricas: $x = x_0 + rv_1$; $y = y_0 + rv_2$; $z = z_0 + rv_3$ (E. P.)

Nota: Se llama PARÁMETRO a una constante que toma diferentes valores.
Si en cada una de las ecuaciones paramétricas se despeja el parámetro r, por transitividad de la igualdad se tienen las llamadas ECUACIONES SIMÉTRICAS de la recta:

$$x = x_0 + r\,v_1 \;\Rightarrow\; r = \frac{x - x_0}{v_1}$$

$$y = y_0 + r\,v_2 \;\Rightarrow\; r = \frac{x - x_0}{v_1} \;\Rightarrow$$

$$z = z_0 + r\,v_3 \;\Rightarrow\; r = \frac{x - x_0}{v_1}$$

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Ecuaciones simétricas (E. S.)

Ejemplo:

Hallar las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por el punto P: (-1, 0, 3) en la dirección del vector **v** = 3**i** + **j** –2 **k**.

Solución: En este caso (x_0, y_0, z_0) = (-1, 0, 3) y (v_1, v_2, v_3) = (3, 1, -2).

Aplicando los resultados anteriores tenemos:

Ecuaciones Paramétricas: $\begin{cases} x = -1 + 3r \\ y = r \\ z = 3 - 2r \end{cases}$

Ecuaciones Simétricas: $\frac{x - (-1)}{3} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - 3}{-2} \;\Rightarrow\; \frac{x + 1}{3} = y = \frac{-z + 3}{2}$

Caso 2: Se conocen las coordenadas de 2 puntos P y Q de la recta. En este caso, se tienen dos opciones para definir el vector direccional **v** , y dos opciones para el punto por el que debe pasar la recta, lo que permite varias posibilidades para la ecuación vectorial (de la cual se deducen las E. P. y las E. S.).

Si P = (x_1, y_1, z_1) y Q = (x_2, y_2, z_2) una de esas posibilidades es:

v = PQ = **q – p** = $(x_2 - x_1\,,\, y_2 - y_1\,,\, z_2 - z_1)$ y el punto conocido P, se tiene:

Ecuaciones Simétricas : $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$

Ecuaciones Paramétricas:
$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)r \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)r \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)r \end{cases}$$

Ejercicio propuesto: ¿Cuántas y cuáles son las otras posibilidades para las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por los puntos P y Q?

Ejemplo:

Escriba las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta L que pasa por los puntos P: (1, 2, -1) y Q: (3, 1, 2).

Solución: Tomando a Q como el punto conocida y $\overrightarrow{QP}$ como vector direccional

$\mathbf{v} = \overrightarrow{QP} = \mathbf{p} - \mathbf{q} = (-2, 1, -3)$, se tiene:

Ecuaciones Paramétricas:
$$\begin{cases} x = 3 + -2r \\ y = 1 + r \\ z = 2 - 3r \end{cases}$$

Ecuaciones Simétricas:
$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{-x+3}{2} = y - 1 = \frac{-z+2}{3}$$

Definición: Dos RECTAS L_1 y L_2 son PARALELAS si sus correspondientes vectores direccionales $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ lo son.

$$L_1 \parallel L_2 \iff \mathbf{v}_1 = k\,\mathbf{v}_2$$

Dos RECTAS L_1 y L_2 son ORTOGONALES, PERPENDICULARES o NORMALES si sus correspondientes vectores direccionales $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ lo son.

$$L_1 \perp L_2 \iff \mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2 = 0$$

Ejemplos:

1. Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta L que pasa por el origen y es paralela a la recta L_1, con ecuaciones paramétricas: $x = 3 - 2r$; $y = r$; $z = 4$.

Solución: Si la recta pasa por el origen, el punto conocido P es (0, 0, 0).

Como la recta L es paralela a la recta L_1, el vector direccional de L es el mismo de L_1, es decir : **v** = (-2, 1, 0) (se deduce de las ecuaciones paramétricas de L_1).

Por tanto: $\frac{x-0}{-2} = \frac{y-0}{1}$ y z = 0 , entonces:

$-\frac{x}{2} = y$ y z = 0 son las Ecuaciones Simétricas de la recta.

2. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta L normal, a la recta L_1 cuyas ecuaciones paramétricas son $x = 1 - r$; $y = 2$; $z = -1 + 2r$. Las rectas se intersectan en el punto para el cual el parámetro r = -1.

Solución:

Primero se busca el punto de intersección de las 2 rectas, el cual será considerado como el punto P.

Si r = -1 entonces $x = 2$, $y = 2$, $z = -3$ luego el punto P es (2, 2, -3).

Ahora hallamos el vector direccional **v** de L.

Sea **v** = (a, b, c) y $\mathbf{v}_1 = (-1, 0, 2)$, como $L_1 \perp L$ se debe cumplir $\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v} = 0$,

Entonces, $\mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v} = -a + 2c = 0 \Rightarrow a = 2c$ y el vector **v** es de la forma $(2c, b, c)$.

Tomando $c = 1$ y $b = 0$ se tiene v = (2, 0, 1) y las ecuaciones paramétricas de la recta L normal a L_1 son: $x = 2 + 2r$; $y = 2$; $z = -3 + r$.

Ejercicios propuestos:

1. En cada caso muestre que las rectas dadas son ortogonales:

a) L_1: $x = 4-r$; $y = -1-r$; $z = 4+3r$ y L_2: $x = 3+2s$; $y = -1+s$; $z = s$.

b) L_1: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z+1}{4}$ y L_2: $\frac{x-6}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{-2}$.

2. Si $x = 5 - 3r$; $y = -2 + r$; $z = 1 + 9r$ son las ecuaciones paramétricas de una recta L_1, encuentre las ecuaciones simétricas de otra recta L paralela a L_1 y que pasa por el punto Q: (-6, 4, -3).

3. Encuentre la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta L_1 que pasa por el origen y es ortogonal a la recta L_2 que pasa por los puntos A: (1, -2, 0) y B: (2, -1, 3).

ECUACIÓN DE UN PLANO EN $\Re^3$:

Un plano S en $\Re^3$, queda definido por 3 puntos “no colineales” (que no están sobre la misma recta), o por un punto contenido en el plano y un vector ortogonal a este.

Caso 1. Se conoce un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ por el cual pasa el plano S y un vector **n** = (a, b, c) normal (ortogonal) al plano.

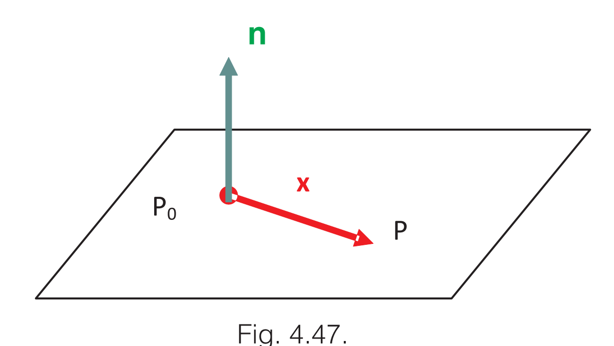


Fig. 4.47.

Si P = (x, y, z) es cualquier punto del plano S entonces el vector $\mathbf{x} = \overrightarrow{P_0P}$ es ortogonal a n (Figura 4.47) . Por tanto, el plano S queda definido por:

$S = \{\mathbf{x} \in \Re^3 \ / \ \mathbf{n} \bullet \mathbf{x} = 0\}$

Ecuación vectorial: $\mathbf{n} \bullet \mathbf{x} = 0$ del plano ortogonal al vector **n**.

Como $\mathbf{x} = \overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, se tiene :

$\mathbf{n} \bullet \mathbf{x} = (a, b, c) \bullet (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$

Ecuación cartesiana: $a.(x - x_0) + b.(y - y_0) + c.(z - z_0) = 0$ del plano que pasa por el punto P y es ortogonal al vector **n**.

Ejemplo:

Hallar la ecuación cartesiana del plano S que pasa por el punto (1, 2, -3) y es normal al vector de coordenadas (2, -1, 3).

Solución: Si $P_0 = (1, 2, -3)$ y **n** = (2, -1, 3) , entonces:

$$2(x - 1) + [-1](y - 2) + 3(z - [-3]) = 0.$$

Luego $2x - y + 3z = -9$ es la ecuación cartesiana del plano.

Caso 2. Se conocen 3 puntos del plano P, Q y R, no colineales.

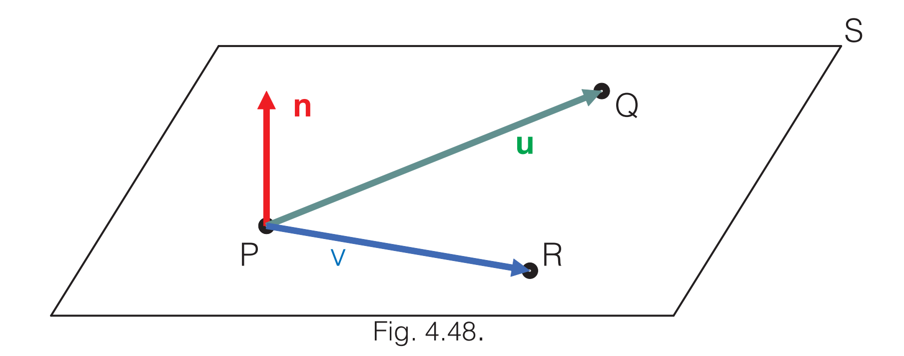


Fig. 4.48.

Si $P = (x_1, y_1, z_1)$; $Q = (x_2, y_2, z_2)$ y $R = (x_3, y_3, z_3)$ se definen 2 vectores.

$\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = \mathbf{q} - \mathbf{p} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ y $\mathbf{v} = \overrightarrow{PR} = \mathbf{r} - \mathbf{p} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$

Entonces un vector normal al plano S es: **n** = **v** x **u** (figura 4.48).

Con el vector **n** así definido hay 3 posibilidades para elegir el punto del plano: P, Q o R y aplicar el resultado del caso 1.

¿Cuántas opciones más hay para definir el vector **n**? Justifique su respuesta.

Ejemplo:

Encuentre la ecuación cartesiana del plano S que contiene a los puntos P: (-2, 0, 3) ; Q = (1, 1, 2) y R = (2, 3, 0).

Solución: Podemos definir $\mathbf{u} = \overrightarrow{QR}$ y $\mathbf{v} = \overrightarrow{QP}$ entonces $\mathbf{n} = \overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QP}$

$$\mathbf{u} = (1, 2, -2) \text{ y } \mathbf{v} = (-3, -1, 1) \Rightarrow \mathbf{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, 5, 5)$$

Tomando a R como el punto conocido se tiene:

$$(0, 5, 5) \bullet (x-2, y-3, z-0) = 0 \Rightarrow 0.(x - 2) + 5(y - 3) + 5(z - 0) = 0 \Rightarrow 5y + 5z = 15.$$

Luego $y + z = 3$ es la ecuación cartesiana del plano S.

Nota: En la ecuación no aparece la variable x, esto significa que x puede tomar cualquier valor y por tanto el plano $v + z = 3$ corta a los ejes Y y Z en 3, pero no corta al eje X (Figura 4.50) .

Casos Especiales de Planos:

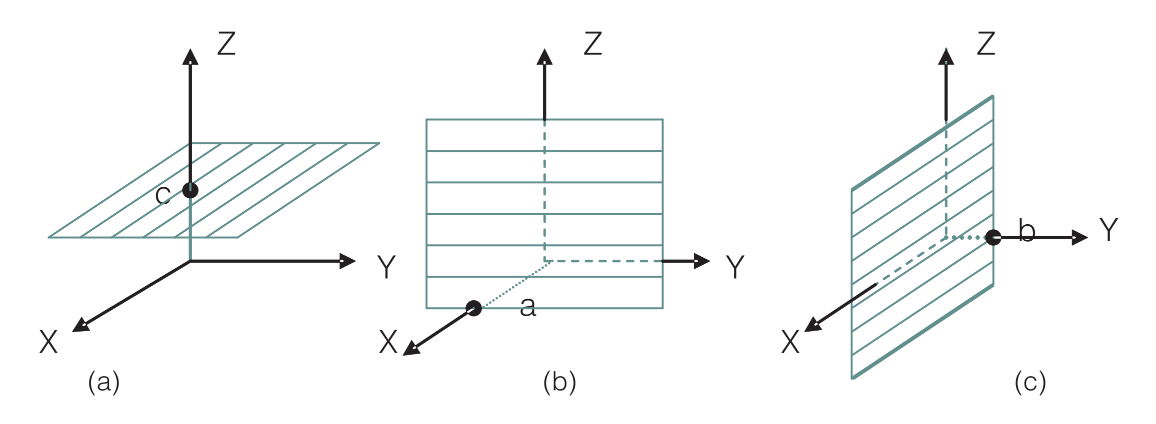


Fig. 4.49.

- Plano paralelo al plano XY con ecuación $z = c$ en el cual x y y toman cualquier valor. (Figura 4.49 a)
- Plano paralelo al plano YZ con ecuación $x = a$ en el cual y y z toman cualquier valor. (Figura 4.49 b)
- Plano paralelo al plano XZ con ecuación $y = b$ en el cual x y z toman cualquier valor. (Figura 4.49 c)

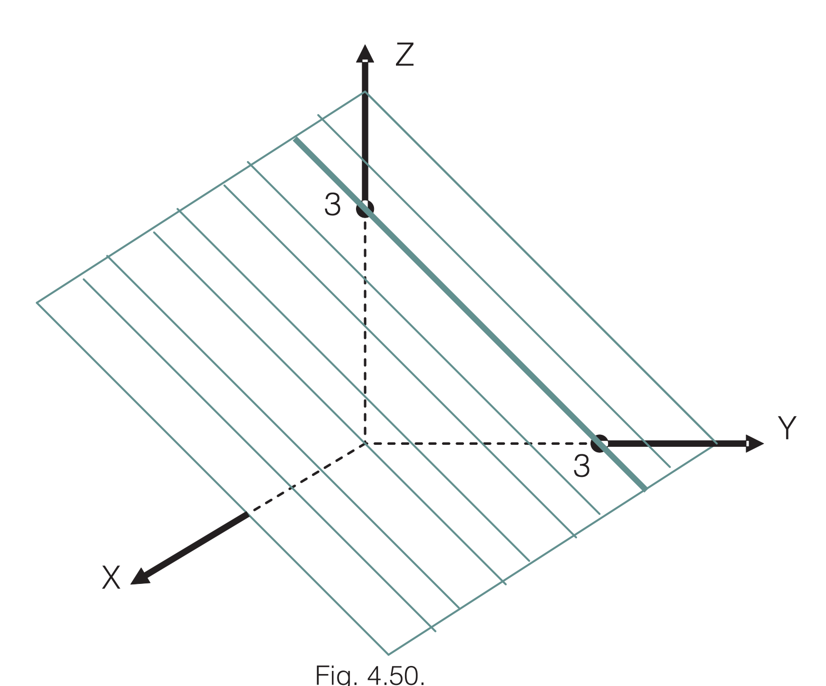


Fig. 4.50.
(Gráfica del plano del ejemplo anterior con ecuación $y + z = 3$)

Definición: Dos PLANOS S_1 y S_2 son PARALELOS si sus respectivos vectores normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ lo son : $S_1 \| S_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 = k\,\mathbf{n}_2$.

Dos PLANOS S_1 y S_2 son ORTOGONALES si sus respectivos vectores normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ lo son : $S_1 \perp S_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{n}_2 = 0$.

Ejemplos:

1. Encuentre la ecuación cartesiana del plano S que pasa por el punto P:(1, 2, -3) y es paralelo al plano S_1 definido por $3x - y + 2z = 4$

Solución: Si S es paralelo a S_1 debe tener el mismo vector normal de S_1.

Como $\mathbf{n}_1 = (3, -1, 2)$ y se conoce el punto P de S se tiene:
$(3, -1, 2)\bullet(x - 1, y - 2, z + 3) = 0 \Rightarrow 3x - 3 - y + 2 + 2z + 6 = 0$

$\Rightarrow \quad 3x - y + 2z = -5$ es la ecuación del plano S.

2. Decidir si los siguientes pares de planos son o no ortogonales:

a) S_1: $x - y + z = 3$ y S_2: $-3x + 3y - 3z = -9$
b) S_1: $2x - y + z = 3$ y S_2: $x + y - z = 7$

Solución:

a) $\mathbf{n}_1 = (1, -1, 1)$ y $\mathbf{n}_2 = (-3, 3, -3) \Rightarrow (1, -1, 1)\bullet(-3, 3, -3) = -9 \neq 0$
entonces los planos no son ortogonales.

b) $\mathbf{n}_1 = (2, -1, 1)$ y $\mathbf{n}_2 = (1, 1, -1) \Rightarrow (2, -1, 1)\bullet(1, 1, -1) = 0$
por tanto los planos son ortogonales.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA:

Dado un punto $Q = (x_1, y_1, z_1) \in \Re^3$ y una recta L con ecuación vectorial $\mathbf{x} = \mathbf{p} + r\,\mathbf{v}$, la distancia del punto Q a la recta L que denotaremos d(Q, L),

Se define como: $$d(Q, L) = \frac{\|u \times v\|}{\|v\|}$$

donde u es un vector definido por cualquier punto $P \in L$ y el punto Q y v es el vector direccional de la recta.

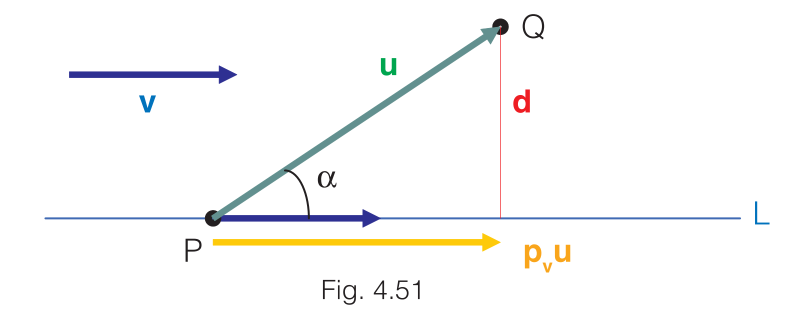


Fig. 4.51

Al graficar el vector proyección de **u** sobre **v** se forma un triángulo rectángulo, en el cual la distancia d del punto Q a la recta L es el cateto opuesto al ángulo α entre los vectores **u** y **v** (Figura 4.51).

Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{p_v u}\|^2 + d^2 \quad \Rightarrow \quad d^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{p_v u}\|^2$$

Como $\cos\alpha = \frac{\|p_v u\|}{\|u\|} \quad \Rightarrow \quad \|p_v u\| = \|u\| \cdot \cos\alpha = \|u\| \cdot \frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{u \bullet v}{\|v\|}$

$$\Rightarrow \quad \|p_v u\|^2 = \frac{(u \bullet v)^2}{\|v\|^2}$$

Remplazando en la forma de Pitágoras: $d^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{(u \bullet v)^2}{\|v\|^2}$

Efectuando la suma: $d^2 = \frac{\|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - (u \bullet v)^2}{\|v\|^2}$

Aplicando la propiedad 4 del producto mixto: $d^2 = \frac{\|u \times v\|^2}{\|v\|^2} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\|u \times v\|}{\|v\|}$

Ejemplo:

Hallar la distancia del punto (4, 2, 0) a la recta L con ecuación vectorial
x = (3, 0, 2) + r (1, 1, 2) .

Solución: De la ecuación vectorial de L se deduce que un punto P de la recta L es (3, 0, 2) cuando el parámetro r = 0.

El punto Q en este caso es (4, 2, 0) entonces: $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = \mathbf{q} - \mathbf{p} = (1, 2, -2)$.

Como $\mathbf{v} = (1, 1, 2) \Rightarrow \|\mathbf{v}\| = \sqrt{6}$.

Además $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (6, -4, -1) \Rightarrow \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{53}$.

Por tanto: $d = \dfrac{\sqrt{53}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\dfrac{53}{6}}$ unidades lineales es la distancia entre el punto Q y la recta L.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO:

Dado un punto Q y un plano S en $\Re^3$, la distancia de Q a S que denotaremos d(Q, S), queda definida por la longitud de la proyección del vector $\overrightarrow{PQ}$ sobre el vector **n** normal al plano . Entonces:

Se define como:

$$d(Q, S) = \|\mathbf{p_n u}\| = \frac{|u \bullet n|}{\|n\|}$$

donde $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ es un vector que se define entre cualquier punto P del plano S y el punto conocido Q (Figura 4.52).

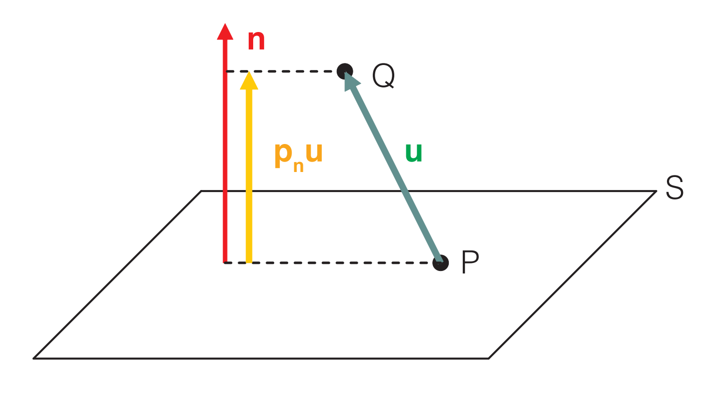


Fig. 4.52.

Nota: Se toma el valor absoluto de **u•n** porque este resultado puede ser negativo, pero una distancia (la norma del vector) es siempre positiva.

Ejemplo:

Hallar la distancia del punto Q: (-3, 0, 2) al plano S cuya ecuación cartesiana es:
$-3x + y + 5z = 0$.

Solución:

De la ecuación cartesiana del plano se deduce que un vector normal al plano S es **n** = (-3, 1, 5) cuya norma es:

$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{35}$$

Para hallar el punto P del plano S se dan valores arbitrariamente a 2 de las variables: x , y; x , z o y , z y se calcula la otra.

Así por ejemplo: $x = 1$ y $y = -2 \Rightarrow z = 1$,o,
$x = 0$ y $y = 0 \Rightarrow z = 0$,o,
$x = 2$ y $y = 1 \Rightarrow z = 1$

Tendremos 3 posibilidades para P: (1, -2, 1) o (0, 0, 0) o (2, 1, 1).

Tomando P: (0, 0, 0) ,entonces, **u** = $\overrightarrow{PQ}$ = (3, 0, 2) , por tanto:

$$d = \frac{|(-3,0,2)\bullet(-3,1,5)|}{\sqrt{35}} = \frac{|9+0+10|}{\sqrt{35}} = \frac{19}{\sqrt{35}}$$ es la distancia del punto Q al plano S.

DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS:

Se calcula la distancia entre 2 planos S_1 y S_2 cuando éstos son paralelos por tanto deben tener el mismo vector normal **n**.

Para calcular la distancia $d(S_1, S_2)$ entre los planos, se toman 2 puntos P y Q arbitrariamente en cada uno de los planos, se define un vector **u** = **q – p** y se proyecta sobre **n** (Figura 4.46).

Se define como:

$$d(S_1, S_2) = \| p_n u \| = \frac{|u \bullet n|}{\|n\|}$$

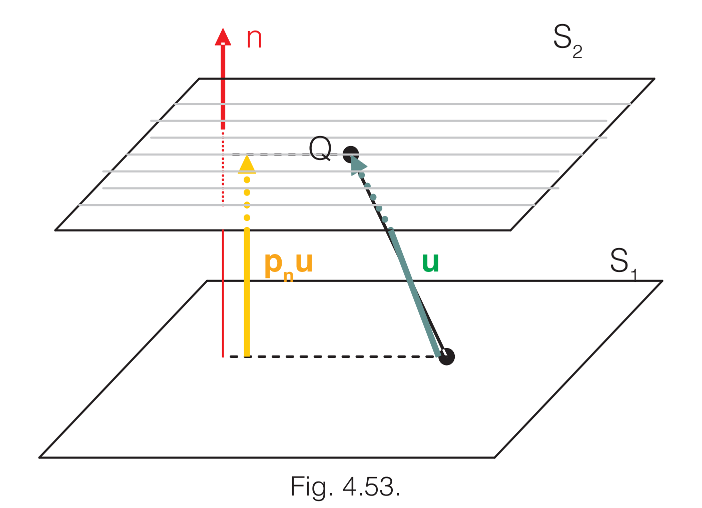


Fig. 4.53.

Ejemplo:

Encuentre la distancia entre los planos S_1: $4x - \frac{3}{2}z - 5 = 0$ y

S_2: $-8x + 3z + 10 = 5$

Solución: Para el plano S_1 el vector normal es $(4, 0, -\frac{3}{2})$.

Como la segunda componente de este vector es cero, la variable y puede tomar cualquier valor: si $y = 3$ y $z = 0$,entonces: $4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$

Luego P: $(\frac{5}{4}, 3, 0) \in S_1$

Para el plano S_2 el vector normal es (-8, 0, 3), la variable y toma cualquier valor:

Si $y = 2$ y $x = 1$,entonces: $-8 + 3z + 10 = 5 \Rightarrow 3z = 3 \Rightarrow z = 1$.

Luego Q: $(1, 2, 1) \in S_2$.

Entonces: $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = (1 - \frac{5}{4}, 2 - 3, 1 - 0) = (-\frac{1}{4}, -1, 1)$.

Por tanto, la distancia entres los dos planos es:

$$d = \frac{\left|\left(-\frac{1}{4}, -1, 1\right) \bullet (-8, 0, 3)\right|}{\sqrt{(-8)^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{|2 + 0 + 3|}{\sqrt{73}} = \frac{5}{\sqrt{73}}.$$

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS:

Para calcular la distancia entre 2 rectas haremos dos consideraciones: las 2 rectas están en el mismo plano y por tanto deben ser paralelas, o las rectas están contenidas en planos paralelos.

Caso 1: Las rectas L_1 y L_2 están en el mismo plano S y son paralelas, es decir sus vectores direccionales son paralelos

Para hallar la distancia entre las rectas L_1 y L_2 se toma arbitrariamente un punto en cada una de las rectas, se define un vector u con esos puntos (ver Figura 4.54) y se aplica el proceso para hallar la distancia entre un punto y una recta.

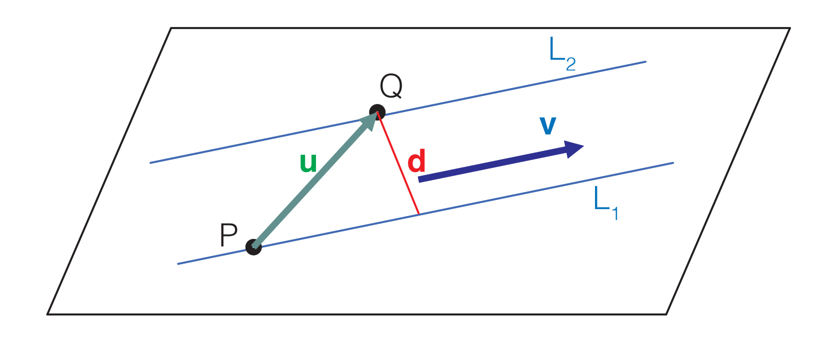


Fig. 4.54.

Ejemplo:

Hallar la distancia entre las rectas:

L_2 con ecuaciones paramétricas: $x = 2 - 4s$, $y = 4 - 2s$ y $z = 2s$ y

L_1 con ecuaciones simétricas: $\frac{x-3}{2} = y+1 = -z - 1 \Leftrightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{-1}$

Solución:

De las ecuaciones simétricas de L_1: $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{-1}$

Se deduce P: (3, -1, -1) y $\mathbf{v}_1 = (2, 1, -1)$.

De las ecuaciones paramétricas de L_2: $x = 2 - 4s$, $y = 4 - 2s$ y $z = 2s$.
Se deduce Q: (2, 4, 0) y $\mathbf{v}_2 = (-4, -2, 2)$.

Las rectas son paralelas porque $-2\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$; definimos $\mathbf{u}$ = PQ = (-1, 5, 1).

Tomando como **v** = (2, 1, -1) ⇒ $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{6}$.

Entonces: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ = (-6, 1, -11) ⇒ $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{158}$.

Luego la distancia entre las rectas es $d = \sqrt{\dfrac{158}{6}} = \sqrt{\dfrac{79}{3}}$.

Caso 2: Las rectas están en planos diferentes pero paralelos entonces sus vectores directores no necesariamente son paralelos (fFgura 4.55)

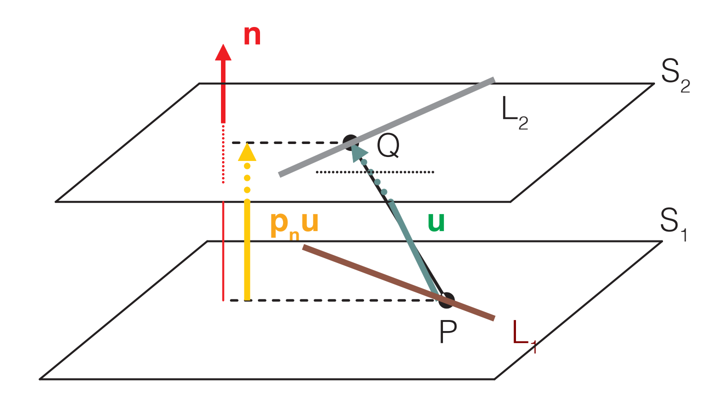


Fig. 4.55.

Si la ecuación vectorial de L_1 es **x** = **p** + r**v** y la de L_2 es **x** = **q** + sw, los vectores **v** y w pueden no ser paralelos, cuando las rectas están en planos diferentes pero paralelos. Cuando el parámetro r = 0 se tiene el punto P∈ L_1 , y cuando el parámetro s = 0 se tiene el punto Q∈ L_2

Entonces, la distancia entre L_1 y L_2 queda definida por la longitud de la proyección del vector $\overrightarrow{PQ}$ = **u** sobre el vector **n**, normal a los 2 planos S_1 y S_2 por ser paralelos:

Se define :

$$d(L_1 , L_2) = \|p_n u\| = \frac{|u \bullet n|}{\|n\|}$$

Ejemplo:

Hallar la distancia entre las rectas:

$L_1: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-7}{-4} = \dfrac{z-2}{4}$ y $L_2: \dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z+1}{1}$

Solución:

Las dos rectas L_1 y L_2 tienen vectores direccionales no paralelos, **v** = (3, -4, 4) y **w** = (-3, 4, 1) respectivamente, por tanto un vector normal a los dos planos es **n** = **v** x **w**.

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -4 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (-20, -15, 0) \Rightarrow \|\mathbf{n}\| = \sqrt{625} = 25$$

Además, un punto P de L_1 es (-2, 7, 2) y un punto Q en L_2 es (1, -2, -1),

Entonces **u** = (1, -2, -1) – (-2, 7, 2) = (3, -9, -3)

Por tanto: $d = \dfrac{|(3,-9,-3)\bullet(-20,-15,0)|}{25} = \dfrac{75}{25}$ = 3 unidades lineales es la distancia entre las 2 rectas L_1 y L_2 .

ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS:

Dos rectas L_1 y L_2 sobre el mismo plano con vectores direccionales $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ no paralelos, se cortan en un punto P y forman entre sí un ángulo α, el cual queda definido por los vectores direccionales (figura 4.56).

Se dice que dos RECTAS son SECANTES si no son paralelas.

Se denota: $L_1 \nparallel L_2 \Rightarrow \mathbf{v}_1 \nparallel \mathbf{v}_2$

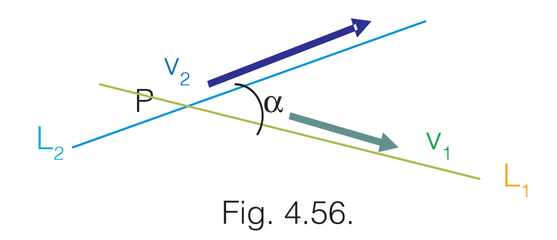


Fig. 4.56.

Ejemplo:

Hallar el ángulo que forman las rectas $L_1: \dfrac{x+3}{2} = y$; $z = 1$ y

$L_2 : x = -r$; $y = 2$; $z = 1 + r$

Solución:

De las ecuaciones simétricas de L_1 se concluye $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0) \Rightarrow \|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{5}$.

De las ecuaciones paramétricas de L_2 se concluye $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1) \Rightarrow \|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{2}$.

Entonces: $\cos\alpha = \dfrac{(2,1,0)\bullet(-1,0,1)}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}} = -\dfrac{2}{\sqrt{10}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(-\dfrac{2}{\sqrt{10}}\right) \approx 129{,}23^0$.

Por tanto, el ángulo entre las rectas L_1 y L_2 es $129{,}23^0$.

ÁNGULO ENTRE DOS PLANOS:

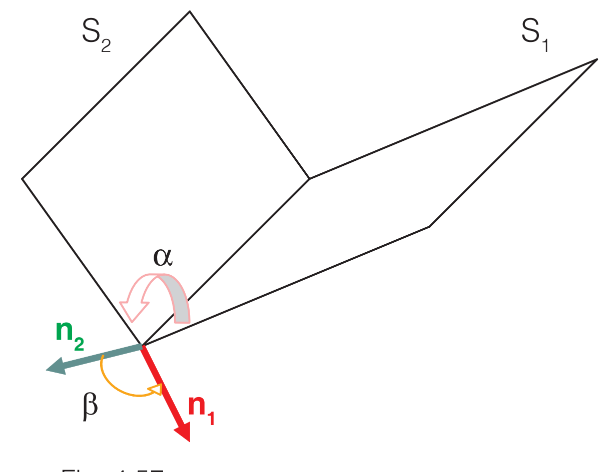


Fig. 4.57

$\mathbf{n_1}$: vector normal a S_1.

$\mathbf{n_2}$: vector normal a S_2.

α: ángulo entre S_1 y S_2.

β : ángulo entre $\mathbf{n_1}$ y $\mathbf{n_2}$.

$$\alpha + \beta + 180^0 = 360^0$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha = 180^0 - \beta$$

Ejemplo:

Hallar el ángulo entre los planos S_1: 3x – y + 2z = 1 y S_2: x + 2y – z = -3.

Solución:
De las ecuaciones de los planos se deduce:

$\mathbf{n}_1 = (3, -1, 2) \Rightarrow \|\mathbf{n}_1\| = \sqrt{14}$ y $\mathbf{n}_2 = (1, 2, -1) \Rightarrow \|\mathbf{n}_2\| = \sqrt{6}$.

Además: $\cos\beta = \dfrac{(3,-1,2)\bullet(1,2,-1)}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{3-2-2}{\sqrt{84}} = -\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{21}}$.

$$\Rightarrow \beta = \arccos\left(-\frac{1}{2\cdot\sqrt{21}}\right) \approx 96{,}26^0.$$

Entonces: $\alpha = 180^0 - \beta \approx 83{,}74^0$ es el ángulo entre los dos planos.

INTERSECCIÓN ENTRE DOS RECTAS:

Dadas 2 rectas L_1 y L_2 con ecuaciones vectoriales $\mathbf{x} = \mathbf{p} + r\mathbf{v}$ y $\mathbf{x} = \mathbf{q} + s\mathbf{w}$ respectivamente, si los vectores **v** y **w** no son paralelos las rectas son secantes, es decir tienen un punto P en común llamado “punto de intersección”.

Se denota: $L_1 \cap L_2 = \{ P\}$.

Para hallar el punto de intersección, con las ecuaciones paramétricas de las rectas se forma un sistema de 3 ecuaciones con dos incógnitas que son los parámetros r y s en cada ecuación.

E.P. de L_1: $x = x_1 + rv_1$, $y = y_1 + rv_2$, $z = z_1 + rv_3$

E.P. de L_2: $x = x_2 + sw_1$, $y = y_2 + sw_2$, $z = z_2 + sw_3$

Igualando las expresiones para cada una de las variables se tiene:

$$\begin{aligned} x_1 + rv_1 &= x_2 + sw_1 \\ y_1 + rv_2 &= y_2 + sw_2 \\ z_1 + rv_3 &= z_2 + sw_3 \end{aligned} \qquad \text{(coordenadas de P)}$$

Este sistema debe tener solución única puesto que la intersección de las rectas es solo un punto P, el cual se obtiene remplazando en las ecuaciones paramétricas de cualquiera

de las rectas, el valor del parámetro correspondiente. En cualquier caso se debe tener el mismo punto.

Ejemplo:

Hallar la intersección de las rectas L_1 y L_2 con ecuaciones vectoriales **x** = (2, 1, 3) + r(1, -1, 3) y **x** = (-1, 1, 1) + s(2, 1, -1) respectivamente

Solución:

Escribimos las ecuaciones paramétricas de cada recta:

$$L_1: \begin{array}{l} x = 2 + r \\ y = 1 - r \\ z = 3 + 3r \end{array} \quad \text{y} \quad L_2: \begin{array}{l} x = -1 + 2s \\ y = 1 + s \\ z = 1 - s \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2 + r = -1 + 2s \\ 1 - r = 1 + s \\ 3 + 3r = 1 - s \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} r - 2s = -3 \\ -r - s = 0 \\ 3r + s = -2 \end{array}$$

Aplicamos el método de reducción de Gauss-Jordan para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow r = -1 \text{ y } s = 1$$

Remplazando r por –1 en las ecuaciones paramétricas de L_1 se tiene :

$x = 1$, $y = 2$, $z = 0$ $\Rightarrow$ P: (1, 2, 0) es el punto e intersección de las rectas

Si se remplaza s por 1 en las ecuaciones paramétricas de L_2 se tiene el mismo punto (1, 2, 0) lo que prueba que la respuesta es correcta.

INTERSECCIÓN ENTRE DOS PLANOS:

Dos planos S_1 y S_2 con vectores normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ no paralelos se llaman PLANOS SECANTES y su intersección es una recta.

Se denota: $S_1 \cap S_2 = \{L\}$

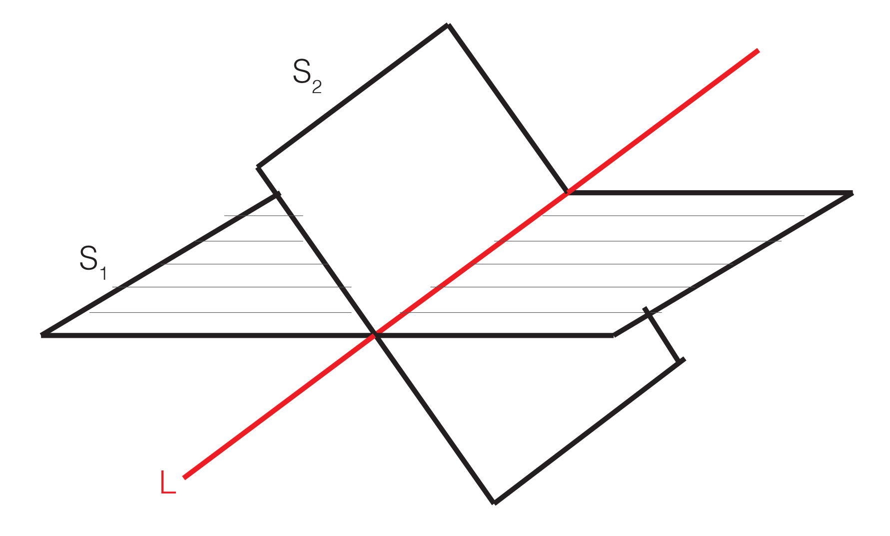


Fig. 4.58.

Las ecuaciones cartesianas de los planos forman un sistema de ecuaciones lineales con menos ecuaciones que variables, esto implica que el sistema tiene infinitas soluciones y la solución general del sistema define las ecuaciones paramétricas de la recta L, de intersección entre los planos (Figura 4.58)

Ejemplo

Encuentre la intersección de los planos definidos por S_1: $-x + y + z = 3$ y S_2: $-4x + 2y - 7z = 5$

Solución:

Usando el método de reducción de Gauss-Jordan resolvemos el sistema de ecuaciones que se forma con las ecuaciones de los planos:

Sistema de ecuaciones: $\begin{cases} -x+y+z=3 \\ -4x+2y-7z=5 \end{cases}$ entonces:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & -7 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 \\ -4 & 2 & -7 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -11 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 11/2 & 7/2 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 11/2 & 7/2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x+\frac{9}{2}z=\frac{1}{2} \\ y+\frac{11}{2}z=\frac{7}{2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x=\frac{1}{2}-\frac{9}{2}z \\ y=\frac{7}{2}-\frac{11}{2}z \end{array}$$

Si hacemos $z = r$,entonces la solución general del sistema de ecuaciones es:

$x = \frac{1}{2} - \frac{9}{2}r$; $y = \frac{7}{2} - \frac{11}{2}r$; $z = r$, estas son las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los 2 planos.

MOMENTO DE UNA FUERZA:

En física se llama “Momento Estático de una Fuerza con respecto a un Eje” (llamado eje de giro), al producto de la magnitud de la fuerza por la distancia entre la recta de acción de la fuerza y el eje de giro (figura 4.59 a). Si la rotación que produce la fuerza se da alrededor de un punto y no de un eje, se llama “Momento Estático de una Fuerza con respecto a un Punto”, y se define como el producto de la magnitud de la fuerza por la distancia entre el punto y la recta de acción de la fuerza (figura 4.59 b).

El momento m de la fuerza **F** respecto al punto P es m = $\|\mathbf{F}\|$ .d

Pero d = $\|\mathbf{R}\|$ .senα $\Rightarrow$ m = $\|\mathbf{F}\| . \|\mathbf{R}\|$ .senα $\Rightarrow$ m = $\|\mathbf{F} \times \mathbf{R}\|$

Como m es la norma del vector momento m, entonces **m** = **F** x **R**

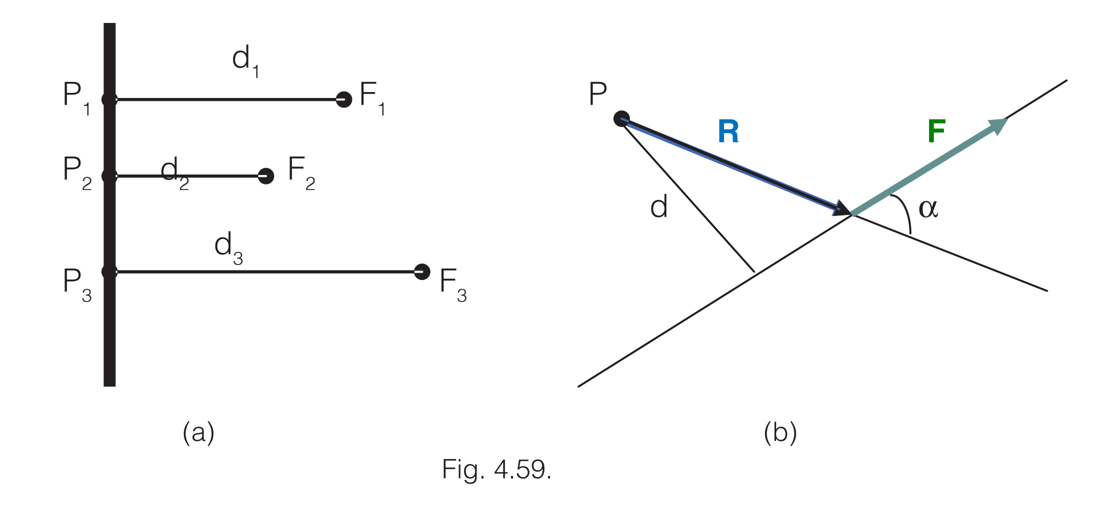


Fig. 4.59.

Nota: El momento *m* puede ser positivo o negativo según sea al sentido de la rotación que produce la fuerza respecto al punto dado P: positivo en sentido antihorario, y negativo en sentido contrario.

Ejemplos:

1. Calcular el momento de la fuerza **F** = -2**i** – 4**j** + **k** para **R** = (-2, 1, -3).

Solución:
Se calcula el vector momento **m** y luego su norma:

$$\mathbf{m} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (11, -8, -10) \Rightarrow m = \sqrt{11^2 + (-8)^2 + (-10)^2} = \sqrt{285} \approx 16{,}9$$

2. Calcular el momento m que produce una fuerza de 3 Newton aplicada en el extremo del vector **R** = ($\sqrt{3}$,1 ,0) con un ángulo de 60^0 respecto al semieje positivo X (Figura 4.60).

Solución:

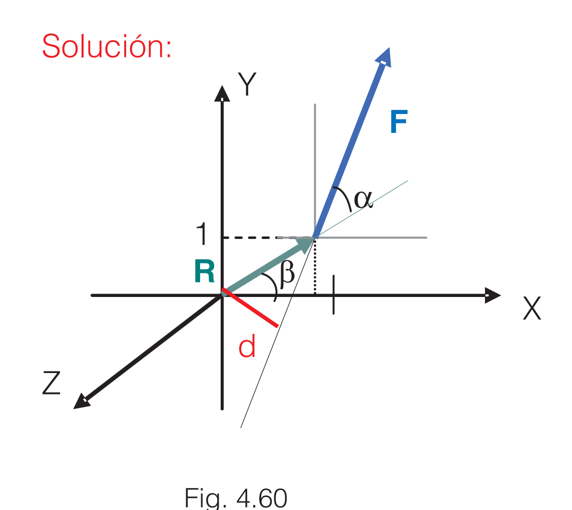


Fig. 4.60

$\mathbf{R} = (\sqrt{3}, 1, 0) \Rightarrow \|\mathbf{R}\| = \sqrt{3+1} = 2$.

β : ángulo direccional de **R**.

α: ángulo entre **R** y **F**

$$\Downarrow$$

$$\alpha = 60^0 - \beta$$

$$sen\,\beta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \beta = 30^0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 60^0 - 30^0 = 30^0$$

Como $m = \|\mathbf{F}\| . \|\mathbf{R}\| .sen\alpha$, el momento que produce la fuerza **F** es:

$m = 2.3.sen30^0 = 2\cdot 3\cdot \frac{1}{2} = 3$ Nm (Newton por metro).

Ejercicios propuestos:

1. Una recta L en $\Re^3$ pasa por el punto P: (-3, 1, 1) y es paralela al vector v = (1, -2, 3). Determine cuáles de los siguientes puntos están sobre L:
a) (0, 0, 0) b) (2, -1, 4) c) (-2, -1, 4) d) (-4, 3, -2) e) (2, -9, 16)

2. Encuentre ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta:
a) Qué pasa por el punto (-3, 2, -4) y es paralela al vector $5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.
b) Qué pasa por los puntos P; (1, 2, 0) y Q: (0, -2, -1).
c) Qué pasa por el origen y es ortogonal al vector u = (4, 0, -3).

3. Pruebe que los siguientes pares de rectas son paralelas y halle la distancia entre ellas:
a) L_1: $\mathbf{x} = (2, 1, -4) + r(5, -2, 1)$ y L_2: $\mathbf{x} = (3, -4, 3) + s(-5, 2, -1)$.
b) L_1: $x = 1+r$; $y = -3+2r$; $z = -3+3r$ y L_2: $x = 3+3s$; $y = 1+6s$; $z = 8+9s$.

4. Una recta que pasa por el punto P: (1, 1, 1) es paralela al vector $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$. Otra recta que pasa por el punto Q: (2, 1, 0) y es paralela al vector $\mathbf{u} = (2, 1, 0)$ intersecta a la primera. Encuentre el punto de intersección y el ángulo que forman las rectas.

5. Halle la distancia entre el punto R: (2, -6, 1) y la recta L que pasa por los puntos P: (3, 4, -2) y Q: (6, 1, -5).

6. Los puntos (1, 1, -1); (3, 3, 2) y (3, -1, -2) determinan un plano S_1:
a) Halle una ecuación cartesiana del plano S_1.
b) Calcule la distancia del plano S_1 al origen.
c) Encuentre la ecuación de un plano S_2 ortogonal a S_1 que pase por el origen.
d) Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta de intersección entre S_1 y S_2.
e) Halle la ecuación del plano S_3 paralelo a S que pase por el punto (2, 0,-2).
f) Calcule la distancia entre los planos S_1 y S_3.
g) Encuentre el ángulo que forman los planos S_2 y S_3 .

7. Dados los vectores $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ halle :
a) La vector proyección de **u** sobre **v**.
b) Un vector unitario paralelo a **v**.
c) El ángulo entre el vector **v** y el vector opuesto de **u**.
d) Las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los extremos de los vectores **u** y **v**.

8. Dibuje el paralelepípedo generado por los vectores $\mathbf{a} = (1, -1, 4)$; $\mathbf{b} = (0, 2, 5)$ y $\mathbf{c} = (3, 0, 0)$ y calcular su volumen.

4.3. VECTORES EN $\Re^n$

En esta sección se generalizan las definiciones y los conceptos estudiados en $\Re^2$ y $\Re^3$ a conjuntos ordenados de n elementos llamados n-uplas.

4.3.1. Generalidades de los vectores en $\Re^n$

Definición: Se llama N-UPLA a un conjunto ordenado de n elementos

se denota $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Definición: Se llama HIPERPLANO $\Re^n$ al conjunto de todas las n-uplas de números reales. Se denota:

$$\Re^n = \{(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) / x_i \in \Re \; con \; i = 1,2,\cdots,n\}$$

Cada n-upla se llama VECTOR EN $\Re^n$ y para n>3 no tiene representación geométrica.

Notación: Una n-upla o vector en $\Re^n$, puede ser expresado como una MATRIZ FILA o como una MATRIZ COLUMNA.

Así: $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Definición: La NORMA del vector $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ y se define como:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Se llama VECTOR UNITARIO o NORMADO de **v** a un vector de norma 1 definido

Como: $\dfrac{v}{\|v\|} = \left(\dfrac{x_1}{\|v\|}, \dfrac{x_2}{\|v\|}, \dfrac{x_3}{\|v\|}, \cdots, \dfrac{x_n}{\|v\|}\right)$ donde : $\left\|\dfrac{v}{\|v\|}\right\| = 1$

Ejemplo:

Hallar un vector normado para cada uno de los siguientes vectores:

a) **u** = (1, -3, 0, 5, -2) $\in \Re^5$ b) **v** = $\begin{pmatrix} 3/2 \\ -4 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \in \Re^4$

Solución:
En cada caso primero se calcula la norma del vector y después se aplica la definición de vector normado.

a) $\| \mathbf{u} \| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 0^2 + 5^2 + (-2)^2} = \sqrt{39}$, entonces el vector normado es:

$$\frac{u}{\|u\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{39}}, \frac{-3}{\sqrt{39}}, 0, \frac{5}{\sqrt{39}}, \frac{-2}{\sqrt{39}} \right)$$

b) $\| \mathrm{v} \| = \sqrt{(3/2)^2 + (-4)^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{9/4 + 16 + 2 + 1} = \sqrt{85/4} = \frac{\sqrt{85}}{2}$

Entonces el vector normado es: $\frac{v}{\|v\|} = \begin{pmatrix} \frac{3/2}{\sqrt{85}/2} \\ \frac{-4}{\sqrt{85}/2} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{85}/2} \\ \frac{1}{\sqrt{85}/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{85}} \\ \frac{-8}{\sqrt{85}} \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{85}} \\ \frac{2}{\sqrt{85}} \end{pmatrix}$

4.3.2. Operaciones con vectores en $\Re^n$

Se definen en forma análoga a como se hizo en $\Re^2$ y $\Re^3$ las operaciones de: suma vectorial, multiplicación escalar y producto escalar o interno.

SUMA: Se define entre 2 vectores de $\Re^n$ y el resultado es un vector de $\Re^n$.

Definición: Si **v** $= (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ y **v** $= (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$

u + **v** $= (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3, \ldots, u_n+v_n) =$ **w** $= (w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n) \in \Re^n$

Propiedades

1. Conmutativa: **u** + **v** = **v** + **u**.
2. Asociativa: [**u** + **v**] + **w** = **u** + [**v** + **w**].
3. Modulativa: El VECTOR NULO en $\Re^n$ es **o** $= (0, 0, 0, \ldots, 0)$ porque:
   v + **o** = **v** = **o** + **v** para todo vector **v** en $\Re^n$.
4. Invertiva: Para todo vector **v** en $\Re^n$ se define el VECTOR OPUESTO de **v** como - **v** $= (-v_1, -v_2, -v_3, \ldots, -v_n)$ porque: **v** + (-**v**) = o = (-**v**) + **v**

MULTIPLICACIÓN ESCALAR: Se define entre un real r y un vector v $\in \Re^n$ y el resultado es un vector de $\Re^n$.

Definición: Si **v** $= (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n) \in \Re^n$ y $r \in \Re$ se define:
r**v** $= (rv_1, rv_2, rv_3, \ldots, rv_n) =$ **w** $= (w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n) \in \Re^n$.

Propiedades (son las mismas que en $\Re^2$ y $\Re^3$)

1. r [s **v**] = [$r.s$] **v** para todo **v** $\in \Re^n$ y para r y s reales.
2. [$r + s$] **v** = r **v** + s **v** para todo **v** $\in \Re^n$ y para r y s reales.
3. r [**u** + **v**] = r **u** + r **v** para todo **u** y **v** $\in \Re^n$ y para r real.
4. 1 **v** = **v** y 0 **v** = o para todo **v** $\in \Re^n$.

PRODUCTO ESCALAR: Es una operación definida entre 2 vectores y el resultado es un real.

Definición: Si **u** $= (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ y **v** $= (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$

u•v $= u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3 + \ldots + u_n.v_n = r \in \Re$

Propiedades

1. $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$.
2. $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = \| \mathbf{u} \|^2 \geq 0$ para todo $\mathbf{u} \in \Re^n$.
3. $\mathbf{u} \bullet [\mathbf{v} + \mathbf{w}] = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$.
4. $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}$, o , $\mathbf{v} = \mathbf{o}$, o , $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Ejemplo:

Si **u** = (3, -1, 2, 1) ; **v** = (0, 1, -1, 0) ; **w** = (5, 4, 6, -3) calcular las operaciones indicadas en cada caso:

a) $5[\mathbf{u} - 2\mathbf{v}]$ b) $2\mathbf{v}^2 + 3[\mathbf{u} \bullet \mathbf{w} - 4\mathbf{u}^2]$ c) $\frac{2}{\| v \|} [\mathbf{w} \bullet \mathbf{u}]\, \mathbf{v}$

Solución:

a) $5[\mathbf{u} - 2\mathbf{v}] = 5[(3, -1, 2, 1) - (0, 2, -2, 0)] = 5(3, -3, 4, 1) = (15, -15, 20, 5)$

b) $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = 0^2 + 1^2 + (-1)^2 + 0^2 = 2$
$\mathbf{u}^2 = \mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = 3^2 + (-1)^2 + 2^2 + 1^2 = 15$
$\mathbf{u} \bullet \mathbf{w} = 3.5 + (-1).4 + 2.6 + 1.(-3) = 15 - 4 + 12 - 3 = 20$

Entonces: $2\mathbf{v}^2 + 3[\mathbf{u} \bullet \mathbf{w} - 4\mathbf{u}^2] = 2.2 + 3[20 - 60] = 4 + 3(-40) = -116$.

c) $\| v \| \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

$\mathbf{u} \bullet \mathbf{w} = 15 - 4 + 12 - 3 = 20$

Entonces: $\frac{2}{\| v \|} [\mathbf{w} \bullet \mathbf{u}]\, \mathbf{v} = \frac{2}{\sqrt{2}} 20(0, 1, -1, 0) = \left(0, 20\sqrt{2}, -20\sqrt{2}, 0\right)$.

Definición: Si α es el ángulo entre los vectores **u** y **v** se define el COSENO DE α como: $\cos \alpha = \frac{u \bullet v}{\| u \| \cdot \| v \|}$

Definición: En $\Re^n$ dos vectores **u** y **v** son VECTORES ORTOGONALES
Si: $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$. Se denota $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$

Definición: Un conjunto H = $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ de vectores en $\Re^n$ se llama CONJUNTO ORTOGONAL si cualquier par de vectores en el conjunto son ortogonales: $\mathbf{v_i} \bullet \mathbf{v_j} = 0$, $\forall\, i \neq j$

Definición: Un conjunto de n vectores en $\Re^n$ es LINEALMENTE DEPENDIENTE (L.D.) si alguno de los vectores se puede expresar como combinación lineal de los restantes.

Definición: Un conjunto de n vectores en $\Re^n$ es LINEALMENTE INDEPENDIENTE (L.I.) si una combinación lineal de los vectores que de como resultado el vector nulo o, sólo es posible con todas las constantes iguales a cero.

Los conceptos de combinación lineal, dependencia e independencia lineal, así como los de conjunto generador, base y dimensión serán definidos y estudiados en detalle un la siguiente unidad llamada Espacios Vectoriales (5).

En la unidad 5 se caracterizan los conjuntos según la estructura algebraica que posean, es decir, según las operaciones que se definen en el conjunto y las propiedades que ellas cumplen dentro del conjunto.

Ejercicios resueltos:

1. Verificar que el conjunto {(1, 2, 1, -2); (0, -2, -2, 0); (0, 2, 3, 1); (3, 0, -3, 6)} de vectores en $\Re^4$ es linealmente independiente.

Solución:

Según la definición, se debe comprobar que una combinación lineal de los vectores que de cómo resultado el vector nulo, sólo es posible con todas las constantes iguales a cero.

Si $a(1, 2, 1, -2) + b(0, -2, -2, 0) + c(0, 2, 3, 1) + d(3, 0, -3, 6) = (0, 0, 0, 0)$

Entonces:

$$\begin{aligned} 1a + 0b + 0c + 3d &= 0 \\ 2a - 2b + 2c + 0d &= 0 \\ 1a - 2b + 3c - 3d &= 0 \\ -2a + 0b + 1c + 6d &= 0 \end{aligned}$$

Se ha formado un sistema homogéneo de ecuaciones lineales (S.L.H.), que según se estudió en la segunda unidad, tiene solución única si el determinante de la matriz de coeficientes es diferente de cero. En tal caso esa solución es la trivial, es decir , $a = b = c = d = 0$.

Veamos: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -6 \\ 1 & -2 & 3 & -6 \\ -2 & 0 & 1 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -6 \\ -2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 12 \end{vmatrix} = -24$

Concluimos entonces que los vectores del conjunto dado son linealmente independientes.

2. Comprobar que los vectores $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ de $\Re^3$ son linealmente dependientes.

Solución:

Por definición, los vectores son linealmente dependientes si alguno de ellos es combinación lineal de los restantes.

En este caso $\mathbf{z} = -2\mathbf{u} + 2\mathbf{v} + \mathbf{w}$, por tanto los vectores **u**, **v**, **w** y **z** son linealmente dependientes.

Otra forma de justificar la respuesta es la siguiente: Si los vectores no fueran L.D. serían L.I., es decir una combinación lineal de los vectores que de cómo resultado el vector nulo, solo sería posible con todas las constantes iguales a cero.

Por otra parte, en el ejercicio anterior se muestra que la combinación lineal da origen a un S.L.H. que en este caso tendrá mas variables (4) que ecuaciones (3), por tanto existen infinitas soluciones, es decir, se pueden hacer combinaciones lineales de los vectores que den como resultado el vector nulo, sin que todas las constantes sean cero.

3. Decidir cuales de los siguientes conjuntos de vectores son ortogonales:

a) { **i** , **j** , **k** }.

b) {(0, 1, 0, 1) ; (1, -2, 1, 2) ; (3/4, 0, -3/4,0) ; (-1, 1, -1, 1)} .

c) {(1, 1, 1, 0) ; (0, -1, 1, -1) ; (-1/3, 1/3, 0, -1/3) ; (-2/3, 0, 2/3, 2/3)}.

Solución:

Por definición, para ver si un conjunto de vectores es ortogonal se debe verificar que cualquier par de vectores del conjunto es ortogonal, es decir que el producto interno de dos de ellos es cero.

a) Como **i** = (1, 0, 0) ; **j** = (0, 1, 0) y **k** = (0, 0, 1) entonces:

i•j = 0 ; **j•k** = 0 ; **k•I** = 0

Por tanto, el conjunto es ortogonal.

b) Si llamamos a los vectores del conjunto **a, b, c** y **d** respectivamente, se tiene:

a•b = -2+2 = 0
a•c = 0
b•c = 3/4- 3/4 = 0
c•b = -3/4+3/4 = 0

Pero **a•d** = 1+1 = 2 y **b•d** = -1-2-1+2 = -2

Por tanto, el conjunto no es ortogonal.

c) Como en el caso anterior llamaremos a los vectores **a**, **b**, **c** y **d** respectivamente, entonces:

a•b = – 1 + 1 = 0 ; **a•c** = –1/3 + 1/3 = 0

b•c = -1/3 + 1/3 = 0 ; **b•d** = 2/3 – 2/3 = 0

c•b = 2/9 – 2/9 = 0 **a•d** = –2/3 + 2/3 = 0

Efectuamos todas las posibilidades para el producto interno y los resultados son cero, esto implica que todos los pares de vectores son ortogonales y por tanto el conjunto es un conjunto ortogonal.

4. Expresar, si es posible, el vector **u** = (1, 1, 0, 2) $\in \Re^4$ como combinación lineal de los vectores: **a** = (0, 1, -1, 1); **b** = (2, 0, 0, -2) y **c** = (3, 1, 0, -2).

Solución:

Escribimos la combinación lineal general **u** $= r$**a** + s**b** + t**c** donde r, s y t son escalares:

(1, 1, 0, 2) = r(0, 1, -1, 1) + s(2, 0, 0, -2) + t (3, 1, 0, -2) , entonces:

$$
\begin{aligned}
0r + 2s + 3t &= 1\\
1r + 0s + 1t &= 1\\
-1r + 0s + 0t &= 0\\
1r - 2s - 2t &= 2
\end{aligned}
$$

Se generó un sistema de ecuaciones lineales inconsistente, por tanto no es posible expresar al vector **u** como combinación lineal de los vectores **a** , **b** y **c**.

El sistema es inconsistente porque de la tercera ecuación se concluye que $r = 0$, esto conlleva a que $t = 1$ remplazando en la segunda ecuación. Pero remplazando estos valores en la primera y en la cuarta ecuación, se obtienen valores diferentes para s, lo cual es una contradicción.

RESUMEN

En $\Re^2$ un **vector** queda definido por un par ordenado **v** = (x, y).

Los elementos característicos de un vector son:

La **magnitud o norma**: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ si $\mathbf{v} \in \Re^2$.

La **dirección**: $\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

El **sentido** que lo define la flecha.

Para todo vector $\mathbf{v} = (x, y)$ se define el **vector normado o unitario** de **v**: $\left(\dfrac{x}{\|v\|}, \dfrac{y}{\|v\|}\right)$.

Si $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, la **suma** de **u** y **v** es: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (w_1, w_2) = \mathbf{w}$.

Si $r \in \Re$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, la **multiplicación escalar** de v por r es: $r\,\mathbf{v} = (rx_2, ry_2) = \mathbf{z}$.
Se dice que **z** es múltiplo escalar de **v**; **z** y **v** son linealmente dependientes o que **z** y **v** son vectores paralelos.

Estas 2 operaciones permiten expresar cualquier vector del plano $\Re^2$ como **combinación lineal** de los vectores unitarios **i** y **j**: $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, por lo que se dice que los vectores **i** y **j** forman una **base canónica** de $\Re^2$.

El producto escalar (interno o punto) entre $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, se define de 2 formas:

1. A partir de las coordenadas de los vectores como $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = x_1 . y_1 + x_2 . y_2$
2. Como $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \|u\| \cdot \|v\| \cos(\alpha)$, donde α es el ángulo entre los vectores.

De la segunda definición se deduce que el coseno del ángulo entre los vectores es el producto escalar de los 2 vectores normados: $\cos(\alpha) = \dfrac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|} = \dfrac{u}{\|u\|} \bullet \dfrac{v}{\|v\|}$

El **vector proyección** de **u** sobre **v** se define como $\mathbf{p_v u} = \dfrac{u \bullet v}{\|v\|^2}\,\mathbf{v}$.

La **proyección** de **u** sobre **v** es la norma del vector proyección, y si la proyección es cero, los **vectores** son **ortogonales**.

En $\Re^3$ un **vector** queda definido por una terna ordenada $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Con estos vectores se definen las mismas operaciones que con los vectores en $\Re^2$:

- La suma se efectúa entre 2 vectores y el resultado es un vector.
- La multiplicación escalar se define entre un real y un vector y el resultado es un vector.
- El producto escalar (también llamado producto punto o producto interno) definido entre 2 vectores y el resultado es un real.

Se define además que el **producto vectorial** entre 2 vectores y el resultado es un vector, y se denota:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

$$= (u_2v_3 - u_3v_2\ ,\ u_3v_1 - u_1v_3\ ,\ u_1v_2 - u_2v_1) = \mathbf{w} \in \Re^3.$$

Esta operación no es conmutativa: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.
El vector resultante $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal a **u** y a **v** simultáneamente, es decir:
$\mathbf{u}\bullet[\mathbf{v} \times \mathbf{u}] = 0$ y $\mathbf{v}\bullet[\mathbf{v} \times \mathbf{u}] = 0$.
Si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = o$ o alguno de los vectores es el vector nulo, o los vectores son paralelos.

Dos vectores linealmente independientes generan un paralelogramo y su área es la **norma del producto vectorial** de los vectores: $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \operatorname{sen}\alpha$.

El **producto mixto** (también llamado triple producto escalar) es otra operación definida con 3 vectores de $\Re^3$ y el resultado es un real; es la combinación del producto vectorial y del producto escalar entre vectores de $\Re^3$, y se denota $\mathbf{u}\bullet[\mathbf{v} \times \mathbf{w}]$

Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$: $\mathbf{u}\bullet[\mathbf{v} \times \mathbf{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = r \in \Re$.

Tres vectores linealmente independientes generan un paralelepípedo y su volumen es igual al **valor absoluto del producto mixto** de los vectores: $V = |\, w\bullet[\mathbf{u} \times v]\,|$.

Un vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ genera una **recta vectorial** definida por
ecuaciones paramétricas: $x = x_0 + rv_1$; $y = y_0 + rv_2$; $z = z_0 + rv_3$.

ecuaciones simétricas: $\dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2} = \dfrac{z - z_0}{v_3}$.

Dos vectores linealmente independientes $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ generan un plano con ecuación cartesiana: $a.(x - x_0) + b.(y - y_0) + c.(z - z_0) = 0$, donde $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{n} = (a, b, c)$ es un vector normal al plano, y $\mathbf{x} = (x - x_0\ ,\ y - y_0\ ,\ z - z_0)$ es un vector contenido en el plano, entonces $\mathbf{n}\bullet\mathbf{x} = 0$ es la ecuación vectorial del plano.

En $\Re^n$ un vector se llama **n-upla**, se denota $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ y puede ser expresado como una matriz fila o como una matriz columna. Con estos vectores se definen en forma análoga las operaciones definidas en $\Re^2$: suma, multiplicación escalar y producto escalar, así como los conceptos de norma, vector normado y vector proyección.

GLOSARIO

Vector es un segmento de recta dirigido (flecha) y se denota por $\mathbf{v} = \overrightarrow{ab}$ si la flecha que representa el vector sale de a y llega a b.

El Vector normado de **u** es un vector de norma (longitud) 1 en la misma dirección de **u**.

Un **Múltiplo escalar** de **u** es otro vector que se obtiene multiplicando escalarmente a u por cualquier real.

Dos vectores son **linealmente dependientes**, si uno de ellos es múltiplo escalar del otro (están sobre rectas paralelas).

Dos vectores son **linealmente independientes** si están sobre rectas secantes.

Dos vectores son **ortogonales** si su producto escalar es cero.

Un Paralelogramo es un cuadrilátero con los lados iguales y paralelos dos a dos.

Un Paralelepípedo es un sólido delimitado por 6 paralelogramos iguales y paralelos dos a dos.

Una **recta vectorial** es generada por un vector y cada punto representa un vector.

Una **n-upla** es un vector de $\Re^n$ definido por $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Una **base canónica** de $\Re^2$ es un conjunto de 2 vectores unitarios y ortogonales.

Una **combinación lineal** de 2 vectores es la suma de múltiplos escalares de los vectores.

AUTOEVALUACIÓN

En cada caso seleccione la respuesta correcta:

1. Un vector es:
a) Dos puntos del plano.
b) Una flecha.
c) Una colección de segmentos con la misma dirección, magnitud y sentido.
d) Un conjunto de flechas.

2. Si P: (4, 1, 0) y Q: (2, 0, -3), la longitud de $\overrightarrow{PQ}$ es:

a) $\sqrt{17}+\sqrt{13}$. **b)** $\sqrt{30}$. **c)** $\sqrt{24}$. **d)** $\sqrt{14}$.

3. La dirección del vector (3, 6) es:

a) 45^0 . **b)** arctan (2). **c)** $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$. **d)** π.

4. Un vector normado en la misma dirección y sentido de (-1, -2, 3) es:
a) $\left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$. **b)** $\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}\right)$. **c)** $-\frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, -3)$. **d)** (1, 1, -1).

5. El resultado de **j** x **k** es:

a) 0. **b)** 1 . **c)** **i** . **d)** 2.

6. Los vectores 2**i** – 4**j** + 3**k** y $-\frac{2}{3}$**i** + $\frac{4}{3}$**j** – **k** son:

a) Paralelos. **b)** Ortogonales . **c)** Secantes. **d)** Opuestos.

7. El vector proyección de **u** sobre **v** es:
a) $\frac{u \bullet v}{\|v\|^2}$. **b)** $\frac{(u \bullet v)}{\|u\|^2}\mathbf{u}$. **c)** $\frac{u \bullet v}{\|v\|}\mathbf{v}$. **d)** $\frac{(u \bullet v)}{\|v\|^2}\mathbf{v}$.

8. El resultado de **j** x **k** – **k** x **j** es:

a) -2**i** . **b)** 2**i** . **c)** 0. **d)** o.

9. El ángulo entre los planos $2x - y + z = 1$ y $3x + 2z = 0$ es aproximadamente:

a) 205^0 **b)** -25^0 **c)** 155^0 **d)** -155^0

10. La intersección de los planos $2x - y + z = 1$ y $x + 2y - 3z = -1$ es la recta cuyas ecuaciones paramétricas son:

a) $x = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5}r$; $y = -\frac{7}{5} - \frac{3}{5}r$; $z = r$.

b) $x = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}r$; $y = -\frac{3}{5} + \frac{7}{5}r$; $z = r$.

c) $x = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}r$; $y = -\frac{3}{5} - \frac{7}{5}r$; $z = r$.

d) $x = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}r$; $y = \frac{3}{5} + \frac{7}{5}r$; $z = r$.

11. En cada caso, decida si el resultado de la operación indicada es un real, un vector, o no está definida:

a) **u** x (**v** x **w**)

b) **u•**(**v•w**)

c) (**u•v**) **w**

d) ‖ **u** ‖ **v•w**

e) **u** (**v** + **w**)

f) ‖ **u** ‖ + **v•w**

g) $\frac{u \, x \, v}{u \bullet v}$

h) $\frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|}$

Decida si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera (V) o falsa (F):

12. Todo vector de $\Re^2$ puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores de coordenadas (2, 1) y (1, 3).

13. Si **u** y **v** son vectores linealmente dependientes y **w** es ortogonal a **u**, Entonces, **w** es ortogonal a **v**.

14. Si **u•v** = 0 entonces **u** = o ó **v** = o.

15. El ángulo entre los vectores (1, 1, 1) y (-1, 0, 0) es mayor de 90 grados.

16. La componente del vector **u** = (2, 1) sobre la recta generada por el vector **v** = (-3, 2) es $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

17. Si α es el ángulo entre los vectores **u** y **v** y $\cos\alpha = 1$, entonces **u** y **v** tienen la misma dirección.

18. Los puntos A: (4, 2, 1), B: (7, 5, 3) y C: (2, 2, 4) son vértices de un triángulo rectángulo.

19. El vector con punto inicial en (3, 1, -2) y punto terminal en (-3, 4, -1) es 6**i** + 3**j** + **k**.

20. El área del triángulo con vértices en **i**, **j** y **k** es $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

21. Un vector direccional de la recta con ecuaciones simétricas $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ es (3, -1. 2).

22. Un vector normal al plano x – y + 3z = 3 es el vector (-2, 2, -6).

23. Un conjunto de vectores en $\Re^4$ es ortogonal, si el producto interno de dos vectores en el conjunto es cero.

24. Las matrices de orden 5x1 son vectores columna de $\Re^5$.

25. Un vector normado del vector (6, –5, 0, -$\sqrt{3}$) es el vector es el vector

$$\left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, 0, \frac{\sqrt{3}}{8}\right).$$

RETROALIMENTACIÓN

Respuestas a los ejercicios propuestos:

Sección 4.1.2 (página 150): **1.** a) $\sqrt{89}$ y arctan(-8/5) $\approx 122^0$.

b) 2 y arctan(- $\sqrt{3}$) $\approx 300^0$. c) $\frac{\sqrt{97}}{6}$ y arctan(9/4) $\approx 246^0$.

2. a) $\left(\sqrt{2/3}, -\sqrt{1/3}\right)$. b) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3. a) $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. b) $\left(\frac{3\sqrt{2}}{8}, -\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)$ y $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{8}, \frac{3\sqrt{2}}{8}\right)$.

4. a) (-1, -3). b) (7, -1). c) (1, 3) . d) (-7, 1). **5.** $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Falta la respuesta del ejercicio 6.

7. a) senα=4/5 y cosα=-3/5. b) senα=-$\frac{1}{\sqrt{2}}$ y cosα=$\frac{1}{\sqrt{2}}$.

c) senα = 0 y cosα = 1 . d) senα = 1 y cosα = 0.

8. a) $\sqrt{26}$ b) $\sqrt{13}+5$ c) $5-\sqrt{13}$ d) $5\sqrt{2}$

Sección 4.1.2 (página 159): **1.** **q** = (2, -1) + k(7, 6) , k$\in\Re$. **2.** a) $4\sqrt{13}$.

b) 2.$\sqrt{37}$ c) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **3.** **x** = $\left(-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right)$.

4. a) a =0 y b =0. b) $a = \frac{11}{9}$ y $b = \frac{8}{9}$. 6. **y** = -6**i** + 34**j**.

Sección 4.2.2 (página 195): **1.** a) (21, 28, -35) . b) 64 . c) 72. d) (30, 60, -105).

e) $\left(\frac{2}{15}, \frac{4}{15}, -\frac{7}{15}\right)$. **2.** **u** = $\left(-\frac{4}{9}, -\frac{8}{9}, \frac{8}{9}\right)$ y **v** = $\left(\frac{22}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{10}{9}\right)$

3. cosA $=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, cosB $= \frac{13}{\sqrt{205}}$, cosC $= \frac{5}{\sqrt{41}}$.

Sección 4.2.3 (página 208): **1.** a) (-1, -1, 3)•(2, 1, 1) = –2 –1 + 3 = 0.

b) (3, -2, 4)•(4, 2, -2) = 12 – 4 – 8 = 0. **2.** $\frac{x+6}{-3} = y-4 = \frac{z+3}{9}$.

3. Ecuación vectorial: $\mathbf{x} = \mathbf{p} + r\mathbf{v}$,$\forall\ r \in \Re$.
Ecuaciones paramétricas: $x = 3r$; $y = 0$; $z = -r$ (una opción).

Ecuaciones simétricas : $\frac{x}{3} = -z$, $y = 0$ (hay muchas respuestas).

Sección 4.2.3 (página 226): **1.** a) No. b) No. c) Si . d) Si. e) Si.

2. a) Ecuaciones paramétricas: $x = -3 + 5r$; $y = 2 - 7r$; $z = -4 - 3r$.

Ecuaciones simétricas: $\frac{x+3}{5} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z+4}{-3}$.

b) Ecuaciones paramétricas: $x = 1 + r$; $y = 2 + 4r$; $z = r$.

Ecuaciones simétricas: $x - 1 = \frac{y-2}{4} = z$.

c) Ecuaciones paramétricas: $x = 3r$; $y = 0$; $z = 4r$.

Ecuaciones simétricas: $\frac{x}{3} = \frac{z}{4}$; $y = 0$.

3. a) $L_1 \| L_2$ porque $\mathbf{v}_1 = (-1)\mathbf{v}_2$; $d(L_1, L_2) = \sqrt{\frac{883}{15}}$.

b) $L_1 \| L_2$ porque $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{v}_1$; $d(L_1, L_2) = 5\sqrt{\frac{5}{14}}$.

4. Intersección de las rectas: $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$; ángulo: $\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{70}}\right) \approx 25{,}6^0$.

5. $d(R, L) = 7\sqrt{2}$. 6. a) $x + 2y - 2z = 5$. b) $\frac{5}{3}$. c) $2x + y + 2z = 0$.

d) $x = -\frac{5}{3} - 2r$; $y = -\frac{10}{3} + 2r$ e) $x + 2y - 2z = 6$ f) 1 g) 90^0

7. a) $\left(\frac{8}{11}, -\frac{8}{11}, \frac{24}{11}\right)$. b) $\left(\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}\right)$ o $\left(-\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{3}{\sqrt{11}}\right)$.

c) $\arccos\left(\frac{-8}{\sqrt{14}\sqrt{11}}\right) = \arccos\left(\frac{-8}{\sqrt{154}}\right) \approx 130^0$ d) $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$.

8. $\left|\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}\right| = \left|-15-24\right|$ = 39 unidades cúbicas.

Solución Autoevaluación Sección 4.1: (página 179).

1. La respuesta correcta es **c)** porque $\overrightarrow{PQ}$ = **q – p** = (-2-1, 3+4) = (-3, 7).

2. La respuesta correcta es **a)** porque:

$$\left\|\left(-\frac{3}{2}, \sqrt{2}\right)\right\| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+2} = \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2} \, .$$

3. La respuesta correcta es b) porque:

u = (4, -3) y **v** = (2, 1) entonces **u•v** = 8 - 3 = 5 y $\|$ **u** $\|$ = 5.

Además $p_u\mathbf{v} = \dfrac{u \bullet v}{\|u\|^2}\,\mathbf{u}$ entonces $p_u\mathbf{v} = \dfrac{5}{25}(4,-3) = \left(\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$

4. La respuesta correcta es a) porque:
(3, 1) + 2**u** = (6, 4) – **u** $\Rightarrow$ 3**u** = (6, 4) – (3, 1) = (3, 3) $\Rightarrow$ **u** = $\frac{1}{3}$(3, 3) = (1, 1)

5. La respuesta correcta es **d)**: Según la interpretación geométrica de la desigualdad triangular, en cualquier triángulo, la suma de 2 de sus lados es siempre mayor que la longitud del otro lado. En este caso 4 + 6 = 10, la suma de dos lados, es menor de 12, el otro lado.

6. La afirmación es **falsa**. Si alguno de los vectores es el vector nulo **o**, el resultado de su producto interno es cero, por tanto, no necesariamente los vectores han de ser ortogonales o perpendiculares.

7. La afirmación es **verdadera**. Si u es perpendicular a **w** y a la vez **w** es perpendicular a **v** , entonces **u** y **v** son paralelos. Pero si dos vectores son paralelos y uno de ellos es múltiplo escalar del otro, los vectores son linealmente dependientes.

8. La afirmación es **falsa**. En el teorema del coseno, si el ángulo es de 90 grados, su coseno es cero y el enunciado toma la forma del teorema de Pitágoras. Además, geométricamente el teorema del coseno se aplica a cualquier triángulo, mientras que el teorema de Pitágoras sólo se aplica a triángulos rectángulos.

9. La afirmación es **verdadera**. Si dos vectores son paralelos están sobre la misma recta y por tanto, uno de ellos es múltiplo escalar del otro.

10. La afirmación es **falsa**. Dos vectores linealmente independientes están sobre rectas secantes (no paralelas), pero esto no implica que las rectas sean ortogonales (perpendiculares), el ángulo entre ellas puede ser diferente de 90^0.

Solución Autoevaluación Unidad 4: (página 238)

1. La respuesta correcta es **c)**. En el plano geométrico un vector tiene infinitas representaciones, puesto que cualquier par de segmentos paralelos de igual longitud y sentido, definen el mismo vector.

2. La respuesta correcta es **d)**. Si P: (4, 1, 0) y Q: (2, 0, -3) entonces el vector

PQ = (-2, -1, -3) y $\| PQ \| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{14}$.

3. La respuesta correcta es **b)**. La dirección de un vector **v** = (x, y) queda determinada por el ángulo direccional $\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, entonces para el vector (3, 6) se tiene $\alpha = \arctan\left(\frac{6}{3}\right) = \arctan(2)$.

4. La respuesta correcta es **c)**. El vector normado de **v** = (x, y, z) con el mismo sentido de v está definido como: $\left(\frac{x}{\|v\|}, \frac{y}{\|v\|}, \frac{z}{\|v\|}\right)$. Si **v** = (-1, -2, 3) $\Rightarrow \| v \| = \sqrt{14}$

Por tanto, el vector pedido es $\left(\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, -3)$.

5. La respuesta correcta es **c)**. **j** = (0, 1, 0) y **k** = (0, 0, 1) , entonces:

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, 0) = \mathbf{i}\ .$$

6. La respuesta correcta es **a)**. Los vectores son paralelos, porque: **v** = -3**u**

$(2, -4, 3) = -3\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -1\right)$.

7. La respuesta correcta es **d)**. El vector proyección de **u** sobre **v**, es un múltiplo escalar de **v** definido por $p_v\mathbf{u} = \dfrac{u \bullet v}{\|v\|^2}\mathbf{v}$.

8. La respuesta correcta es **b)**. **j** x **k** – **k** x **j** = 2i , porque:

$$\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, 0) = \mathbf{i} \quad \text{y} \quad \mathbf{k}\times\mathbf{j} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 0, 0) = -\mathbf{i}\ .$$

9. La respuesta correcta es **c)**. El ángulo β entre dos planos, se definió como $\beta = 180^0 - \alpha$, donde α es el ángulo entre los vectores normales de los planos

Entonces:
Vector normal al plano $2x - y + z = 1 \Rightarrow$ $\mathbf{n}_1 = (2, -1, 1)$.
Vector normal al plano $3x + 2z = 0 \Rightarrow$ $\mathbf{n}_2 = (3, 0, 2)$.

Por tanto, $\alpha = \arccos\left(\dfrac{n_1 \bullet n_2}{\|n_1\|\|n_2\|}\right) = \arccos\left(\dfrac{6+0+2}{\sqrt{6}\sqrt{13}}\right) = \arccos\left(\dfrac{8}{\sqrt{78}}\right) \approx 25^0$

, luego el ángulo entre los dos plano es $\beta = 180^0 - 25^0 = 155^0$.

10. La repuesta correcta es **b)**. La intersección de dos planos es una recta cuyas ecuaciones paramétricas se obtienen de la solución general del S.E.L., que se forman con las ecuaciones cartesianas de los planos:

$$2x - y + z = 1$$
$$x + 2y - 3z = -1$$

Aplicando el método de reducción de Gauss-Jordan se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{5}F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -7/5 & -3/5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 + 3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & -7/5 & -3/5 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5}z \\ y = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{7}{5}z \end{array}$$

Si $z = r$ se tienen las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección:

$$x = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}r \;\; ; \;\; y = -\frac{3}{5} + \frac{7}{5}r \;\; ; \;\; z = r\,.$$

11. El resultado: **a)** es un vector . **b)** no está definido . **c)** es un vector.
d) es un real . **e)** no está definido. **f)** es un real . **g)** es un vector.
h) es un vector.

12. La afirmación es verdadera. Como los vectores (2, 1) y (1, 3) son linealmente independientes, forman una base de $\Re^2$; por tanto, todo vector del plano puede ser expresado como una combinación lineal de ellos dos.

13. La afirmación es verdadera. Si **u** y **v** son linealmente dependientes, son paralelos, por tanto, si w es ortogonal, **u** también es ortogonal a **v**.

$$\mathbf{u} \,|\,|\, \mathbf{v} \;\Rightarrow\; \mathbf{u} = \mathbf{kv}$$

$$\mathbf{w} \perp \mathbf{u} \Rightarrow \; \mathbf{w} \bullet \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \; \mathbf{w} \bullet (\mathbf{kv}) = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{k}(\,\mathbf{w} \bullet \mathbf{v}) = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{w} \perp \mathbf{v}.$$

14. La afirmación es **falsa**. Si el producto interno de 2 vectores es cero, alguno de lo vectores puede ser el vector nulo, pero también puede ser que los vectores sean ortogonales.

15. La afirmación es **verdadera**. Si el ángulo entre los vectores es α entonces:

$\cos\alpha = \dfrac{(1,1,1) \bullet (-1,0,0)}{\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Como el coseno es negativo en el segundo

cuadrante, el ángulo entre los vectores es mayor de 90^0.

16. La afirmación es **falsa**. La componente sobre **v** del vector proyección $\mathbf{p_v u}$, es

$$k = \frac{u \bullet v}{\|u\|} = -\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

17. La afirmación es **verdadera.** Si el coseno del ángulo entre los vectores es 1, Entonces, el ángulo entre ellos es 0^0 y los vectores están sobre la misma recta y por consiguiente, tiene la misma dirección.

18. La afirmación es **verdadera**. Los lados AB y AC son ortogonales, porque si **u** = AB = (3, 3, 2) y **v** = AC = (-2, 0, 3), entonces: **u**.**v** = –6 + 0 + 6 = 0, y si el triángulo tiene dos lados ortogonales, es rectángulo.

19. La afirmación es **falsa**. El vector con punto inicial (cola) en P = (3, 1, -2) y punto terminal (cabeza) Q = (-3, 4 -1) es: PQ = (-6, 3, 1) = -6**i** + 3**j** + **k**.

20. La afirmación es **verdadera.** Los vértices del triángulo son los puntos A:(1, 0, 0),

B:(0, 1, 0) y C:(0, 0, 1), entonces, el área del triángulo es $\frac{1}{2}\|ABxAC\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Si AB = (-1, 1, 0) , AC = (-1, 0, 1) ,entonces: ABxAC = (1, 1, 1) y $\|ABxAC\| = \sqrt{3}$.

21. La afirmación es **falsa**. Si las ecuaciones simétricas de la recta son:

$\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$, entonces un vector direccional de la recta es cualquier

múltiplo escalar del vector (5, 2, 1).

22. La afirmación es **verdadera.** De la ecuación del plano se deduce que el vector normal es (1, -1, 3), pero cualquier múltiplo escalar de éste, también es normal al plano y (-2, 2, -6) = -2(1, -1, 3).

23. La afirmación es **falsa**. Para que un conjunto de vectores sea ortogonal, se requiere que el producto interno de cualquier par de vectores del conjunto sea cero, es decir, todos los vectores del conjunto son ortogonales dos a dos.

24. La afirmación es **verdadera.** Por definición una n-upla es un vector de $\Re^n$, que se expresa como una matriz fila o columna. En particular las matrices columna de orden 5x1 son vectores de $\Re^5$.

25. La afirmación es **verdadera.** Por definición: $\left\|\left(6, -5, 0, -\sqrt{3}\right)\right\| = \sqrt{36+25+3} = 8$,

,entonces un vector normado es $-\left(\frac{6}{8}, \frac{-5}{8}, \frac{0}{8,} \frac{-\sqrt{3}}{8}\right) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, 0, \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$.

5. ESPACIOS VECTORIALES

"La teoría es el máximo ejemplo del arte de la abstracción matemática, es el instrumento más poderoso para aclarar las estructuras"

James R. Newman.

INTRODUCCIÓN

A través del tiempo, los grandes avances en la matemática y su interrelación con otras áreas del conocimiento han sido fundamentados en los "Métodos de Abstracción". Así, la reducción de un problema a sus aspectos esenciales y básicos ha permitido en muchas ocasiones, interconexiones entre eventos aparentemente no relacionados.

En esta unidad se hará uso precisamente de la "abstracción" para llegar al concepto que es objeto de estudio, los Espacios Vectoriales, estructura algebraica que se define a partir de estructuras más sencillas como el Grupo Conmutativo y el Campo.

Los espacios vectoriales tienen su origen en tópicos de la geometría o la física y deben su importancia a que el conjunto de soluciones de muchos problemas específicos resultan ser "espacios vectoriales", como en el caso de los Sistemas de Ecuaciones Lineales con infinitas soluciones.

En los temas desarrollados hasta ahora, es posible que cada una de las unidades 1 y 4 hayan sido asimiladas simplemente como "dos unidades modulares" del curso. En esas unidades se definieron y operaron dos tipos de elementos llamados respectivamente Matrices y Vectores tanto en el plano ($\Re^2$) como en el espacio ($\Re^3$) haciendo la generalización a $\Re^n$. En esta unidad se podrá comprobar que estos conjuntos con las operaciones de suma y multiplicación escalar en ellos definidos poseen estructura de espacio vectorial.

OBJETIVO GENERAL

Estudiar las características y aplicaciones de la estructura algebraica llamada espacio vectorial, haciendo abstracción de las operaciones definidas entre las matrices y los vectores, así como de sus correspondientes propiedades.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar las estructuras algebraicas de: grupo conmutativo, campo y espacio vectorial.
- Identificar subespacios de un espacio vectorial conocido.
- Determinar la dependencia o independencia lineal de un conjunto de vectores.
- Identificar bases y determinar la dimensión de un espacio vectorial.
- Determinar el rango y la nulidad de una matriz.
- Expresar cambios de base dentro de un espacio vectorial en forma matricial.

CONTENIDO

5.1. Estructuras Algebraicas
5.1.1. Grupo conmutativo
5.1.2. Campo
5.1.3. Espacio vectorial
5.1.4. Subespacios

5.2. Bases y Dimensión
5.2.1. Conjunto generador de un espacio vectorial
5.2.2. Dependencia e independencia lineal entre vectores
5.2.3. Base y dimensión de un espacio vectorial

5.3. Aplicaciones
5.3.1. Rango y nulidad de una matriz
5.3.2. Matriz asociada al cambio de base en un espacio vectorial

5.1. ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

El álgebra es la parte de la matemática que estudia las estructuras algebraicas, y a través de ella se ha llegado a la concatenación de distintas ramas de la matemática (geometría, topología, teoría de números, análisis) e incluso de la matemática aplicada.

Definición: Se llama ESTRUCTURA ALGEBRAICA a un conjunto no vacío en el cual se define una o más operaciones que satisfacen ciertas propiedades ó axiomas

Ejemplos:

1. El conjunto de los números enteros (**Z**) con la suma.

2. El conjunto de los números fraccionarios sin el cero ($\mathbf{Q_0}$) con la multiplicación.

3. El conjunto de los números reales $\Re$con la suma y la multiplicación.

4. El conjunto de las matrices de orden 2x3 ($\mathbf{M}_{2x3}$) con la suma definida entre matrices y la multiplicación por un escalar.

5. El conjunto de vectores en el plano $\Re^2$ con el producto punto (escalar o interno).

5.1.1. Grupo conmutativo

Definición: Se llama GRUPO CONMUTATIVO o ABELIANO a un conjunto no vacío G, en el cual se define una operación $*$ que cumple las siguientes propiedades en G:

Clausurativa: $\forall a, b \in$G, $a * b \in$G.

Asociativa: $(a * b) * c = a * (b * c) = = a * b * c$.

Modulativa: $\exists e \in$G tal que $\forall a \in$G, $a * e = a = e * a$.
e se llama MÓDULO para $*$ en G.

Invertiva: $\forall a \in$G, $\exists a^{-1} \in$G tal que $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$.
a^{-1} se llama INVERSO de a para la operación $*$.

Conmutativa: $a * b = b * a$.

Notación: Se escribe $\langle G,* \rangle$ y se lee “el grupo conmutativo G,$*$

Ejemplos:

1. El conjunto de los números enteros con la suma $\langle Z,+\rangle$ es un grupo conmutativo dado que: la suma de dos enteros es un entero; la suma es una operación conmutativa y asociativa. Además el cero es módulo de la suma ya que cualquier número sumado con cero es el mismo número, y todo entero tiene un inverso aditivo.

2. El conjunto de las matrices de orden 2x3 con la suma de matrices $\langle M_{2x3},+\rangle$ es un grupo conmutativo porque esa operación es:

Clausurativa: Si $A,B\in M_{2x3} \Rightarrow (A+B)\in M_{2x3}$.
Asociativa: $(A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C$.
Conmutativa: $A+B = B+A$.
Modulativa: $A+O = O+A = A$ O es la matriz nula de orden 2x3.
Invertiva: $A+(-A) = (-A)+A = O$ -A es la matriz opuesta de A.

3. El conjunto de los números reales sin el cero, con la multiplicación $\langle \Re_0,\bullet\rangle$ es un grupo conmutativo porque la multiplicación es:

Clausurativa: $\forall a,b\in \Re_0, \quad (a\cdot b)\in \Re_0$.
Asociativa: $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c = a\cdot b\cdot c$.
Conmutativa: $a\cdot b = b\cdot a$
Modulativa: $1\cdot a = a = a\cdot 1, \forall a\in \Re_0$ 1 es el módulo de la multiplicación.

Invertiva: $a\cdot\left(\frac{1}{a}\right) = 1 = \left(\frac{1}{a}\right)\cdot a, \quad \forall a\neq 0$ $\frac{1}{a} = a^{-1}$ es inverso multiplicativo de a.

4. El conjunto de los números naturales con la suma $\langle N,+\rangle$ no es un grupo porque no existen inversos aditivos. Así por ejemplo no hay un número natural que sumado con 3 de cero.

Ejercicios propuestos:

1. Compruebe que $\langle \Re,+\rangle$ es un grupo conmutativo.
2. $\langle \Re,\bullet\rangle$ no es un grupo. Explique por qué.
3. Decida si el conjunto de vectores en $\Re^2$ con el producto punto es o no un grupo.

5.1.2. Campo

Definición: Se llama CAMPO o CUERPO a un conjunto no vacío C en el cual se definen dos operaciones $* \; y \; \Delta$ para las cuales se cumplen las siguientes propiedades en C:

- $\langle C,*\rangle$ es un grupo conmutativo con MÓDULO $e \in C$.
- $\langle C_e,\Delta\rangle$ es un grupo conmutativo con MÓDULO $m \in C_e$.
- La operación Δ es distributiva respecto a la operación $*$, es decir,

$$a\Delta(b*c)=(a\Delta b)*(a\Delta c)\ .$$

C_e es el conjunto C sin el elemento e.

Notación: Se escribe $\langle C, *,\Delta\rangle$ y se lee "El campo $\langle C, *,\Delta\rangle$ ".

Ejemplos:

1. $\langle \Re,+,\cdot\rangle$ es un campo porque el conjunto de los números reales con las operaciones corrientes de suma y multiplicación cumple los requisitos, es decir:

- $\langle \Re,+\rangle$ es un grupo conmutativo.
- $\langle \Re_0,\cdot\rangle$ es un grupo conmutativo.
- $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad a,b,c\in\Re$.

2. El conjunto de vectores en $\Re^2$ con la suma y el producto escalar no es un campo porque el producto escalar entre 2 vectores no es un vector, sino un escalar, es decir el producto escalar no es una operación clausurativa.

Ejercicios propuestos:

1. Compruebe que $\langle Q,+,\cdot\rangle$ es un campo.

2. Enumere las causas por las que $\langle Z,+,\cdot\rangle$ no es un campo.

5.1.3. Espacio vectorial

Definición: Se dice que un conjunto no vacío V es un ESPACIO VECTORIAL sobre el campo de los números reales si se tienen las siguientes condiciones:

(1) Se define en V una operación $\oplus$ llamada Suma Vectorial para la cual $\langle V,\oplus\rangle$ es grupo conmutativo.

(2) Se define una operación $\otimes$ llamada Multiplicación Escalar entre los elementos del campo $\Re$ y del grupo conmutativo V, que cumple las siguientes propiedades:

- $(r \otimes \mathbf{v})\in V$, $\forall\ r\in\Re$ y $\forall \mathrm{v}\in V$
- $1 \otimes \mathbf{v} = \mathbf{v}$, $\forall\ \mathbf{v} \in V$ y $1\in\Re$
- $(r \cdot s) \otimes \mathbf{v}= r \otimes (s \otimes \mathbf{v})$, $r, s\in\Re$ y $\mathbf{v}\in V$
- $(r + s) \otimes \mathbf{v}= (r \otimes \mathbf{v}) \oplus (s \otimes \mathbf{v})$, $r, s\in\Re$, $\mathbf{v}\in V$
- $r \otimes (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v})= (r \otimes\mathbf{u})\oplus (r \otimes \mathbf{v})$, $r \in\Re$, $\mathbf{u}, \mathbf{v}\in V$

Notación:
Se escribe $\langle V, \oplus ,\otimes\rangle$ y se lee "V es un Espacio Vectorial".
Los elementos de V se llaman VECTORES y se denotan con letras en negrilla.
Los elementos de $\Re$ se llaman ESCALARES y se representan con letras minúsculas.

Convención en la notación:
Para evitar posteriores confusiones en la notación de las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ del espacio vectorial, en el adelante se usará "+" para la ADICIÓN VECTORIAL y para la MULTIPLICACIÓN ESCALAR se omite el punto, pero haciendo énfasis en que son operaciones diferentes de la suma y la multiplicación en los números reales. Así: $r\,\mathbf{v}$ se refiere a la multiplicación escalar pero $r \cdot s$ se refiere a la multiplicación de reales.

Ejemplos:

1. El conjunto de matrices de orden mxn con la suma y la multiplicación escalar definidas en la unidad de Matrices, tiene estructura de espacio vectorial sobre los números reales.

2. El conjunto de los vectores en el plano con la suma y la multiplicación escalar definidas en la unidad 4 es un espacio vectorial.

3. El conjunto de polinomios con variable x de grado menor o igual a 2 (que notaremos P_2) con la suma y la multiplicación escalar definida término a término, tiene estructura de espacio vectorial.

Justificación: $\langle P_2,+\rangle$ es un grupo conmutativo porque la suma de polinomios es:

- Clausurativa: Si $p(x)=ax^2+bx+c$ y $q(x)=dx^2+ex+f$, entonces:
$p(x)+q(x)=(a+d)x^2+(b+e)x+(c+f)$ es un polinomio en P_2.

- Asociativa: $[p(x)+q(x)]+r(x)=p(x)+[q(x)+r(x)]$.

- Conmutativa: $p(x)+q(x)=q(x)+p(x)$.

- El polinomio $0=0x^2+0x+0$ es módulo porque $p(x)+0=p(x)$.

- Para todo polinomio $p(x)=ax^2+bx+c$ un polinomio inverso
$[-p(x)]=(-a)x^2+(-b)x+(-c)$, porque: $p(x)+[-p(x)]=0$

- Se define la multiplicación entre un polinomio y un real como:
$r\,p(x)=(r.a)x^2+(r.b)x+(r.c)$ que es un polinomio de grado ≤ 2.

La verificación de las otras propiedades (las de la multiplicación escalar) se deja como ejercicio al estudiante.

4. El conjunto de vectores en $\Re^3$ cuya primera coordenada es 1, con la suma y la multiplicación escalar definida entre vectores, no es un espacio vectorial.

Justificación: Llamaremos: $T=\{(x,y,z)\in\Re^3 / x=1\}$.

Si **u** , **v**$\in T$, **u**$=(1,y_1,z_1)$ y **v**$=(1,y_2,z_2)$ $\Rightarrow$ **u** + **v**$=(2\,,\,y_1+y_2\,,\,z_1+z_2)\notin T$

Como no se cumple la propiedad clausurativa de la suma, T no es un espacio vectorial.

5. El conjunto $H=\{0,1\}$ con la suma y la multiplicación corrientes en los números reales no es un espacio vectorial.

Justificación: La suma en H no es clausurativa porque:

0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1 pero 1 + 1 = 2 y $2\notin H$.

Teorema: Si $\langle V,+,\cdot\rangle$ es un espacio vectorial sobre $\Re$ entonces:
(1) 0 **v** = o , para todo vector v$\in V$
(2) c **v** = o $\Rightarrow$ c = 0 ó **v** = o
(3) (-1) **v** = -**v**

Este teorema garantiza que en cualquier espacio vectorial siempre podemos encontrar el módulo de la suma vectorial, multiplicando escalarmente cualquier vector del espacio por el escalar 0. En forma análoga siempre se puede obtener el vector opuesto de cualquier vector, multiplicando escalarmente el vector por -1.

Ejercicios propuestos:

En cada caso decida si el conjunto dado es o no un espacio vectorial, indicando para cada uno las propiedades que no se cumplen:

1. El conjunto de los polinomios de grado 2 (P^2) con la suma y la multiplicación escalar corrientes.

2. El conjunto $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{2x1} / x \leq 2 \right\}$ con la suma y la multiplicación escalar definida en el conjunto de las matrices.

3. El conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo de 3 ecuaciones con 5 incógnitas, con la suma y la multiplicación escalar entre vectores.

4. El conjunto de las matrices diagonales de orden 3 con la suma y la multiplicación escalar entre matrices.

5.1.4. Subespacios

Definición: Dado un subconjunto W de un espacio vectorial $\langle V,+,\cdot\rangle$ sobre los números reales, se dice que W es un SUBESPACIO de V si $\langle W,+,\cdot\rangle$ es un espacio vectorial sobre los reales.

Ejemplos:

1. La Recta Vectorial D_0 es un subespacio del Plano Vectorial $\Re^2$.

2. El Plano Vectorial $\Re^2$ es un subespacio del espacio tridimensional $\Re^3$.

Justificación:

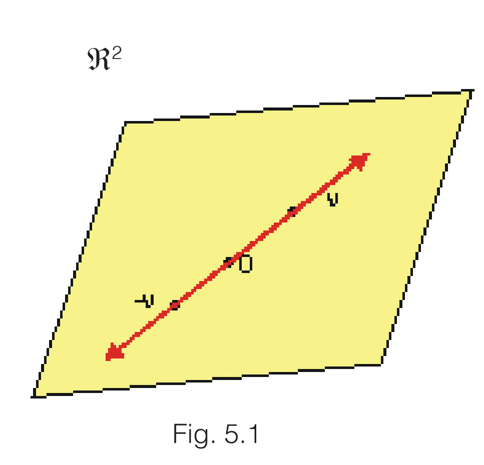


Fig. 5.1

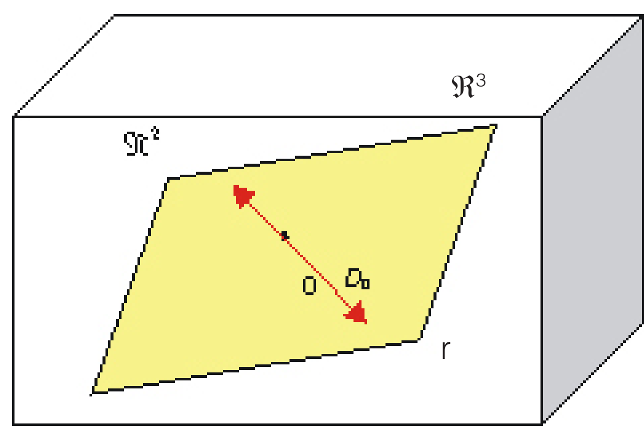


Fig. 5.2

Como se observa en la figura 5.1 la recta D_0 es un subconjunto del plano $\Re^2$ y conserva las propiedades de la suma y la multiplicación escalar definidas en el plano.

La figura 5.2 permite observar que D_0 es subespacio de $\Re^2$ y a su vez $\Re^2$ es subespacio de $\Re^3$.

3. El conjunto de las matrices diagonales de orden n es un subespacio del espacio vectorial de las matrices de orden n.

Justificación: La suma de matrices diagonales es una matriz diagonal, y cualquier matriz diagonal multiplicada por cualquier escalar sigue siendo una matriz diagonal. (Verificar las dos afirmaciones con un ejemplo).

Teorema: Dado un espacio vectorial $\langle V,+,\cdot\rangle$ sobre los reales, un subconjunto W de V es un subespacio de V si y solo si:

(1) para todo $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$ se tiene $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_3 \in W$.
(2) para todo $r \in \Re$ y $\mathrm{w} \in W$ se tiene $r\,\mathbf{w} = \mathbf{v} \in W$.

El anterior teorema se resume diciendo que las dos operaciones definidas en V y heredadas por W, son clausurativas o cerradas en W.

Demostración:
Estas dos condiciones son suficientes puesto que:

- Si W es subespacio de V se cumplen las condiciones (1) y (2) por definición.
- Recíprocamente, si se cumple la condición (2): $0\mathbf{w} = \mathbf{o}$ entonces el módulo $\mathbf{o} \in W$, y $(-1)\mathbf{w} = -\mathbf{w}$ entonces todo elemento de W tiene inverso.

Además la suma siempre es asociativa y conmutativa.

Luego W es un espacio vectorial y por consiguiente un subespacio de V.

Ejemplos:

1. El subconjunto W del espacio vectorial $\Re^3$ definido por:

$W = \{(x, y, z,) \in \Re^3 / x = 2y\}$ es un subespacio de $\Re^3$.

Justificación:

Basta con verificar que se cumplen las 2 condiciones del teorema anterior.

(1) $(2y_1, y_1, z_1) + (2y_2, y_2, z_2) = (2[y_1 + y_2], y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (2w_2, w_2, w_3) \in W$.
(2) $r(2y, y, z) = (2[ry], ry, rz) = (2v_2, v_2, v_3) \in W$.

es decir, la suma y la multiplicación escalar son operaciones cerradas en W lo cual garantiza que W es subespacio de $\Re^3$.

2. El subconjunto S de el espacio vectorial P de todos los polinomios con coeficientes reales, definido por $S = \{p(x) \in P / gr(p(x)) = 3\}$ no es un subespacio de P.

Justificación:

Si $p(x) \in S$, $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a \neq 0$
Como $0 \in \Re$, $0\, p(x) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = 0 \notin S$,

Es decir, la multiplicación escalar no es cerrada en S y por el teorema anterior S no es subespacio de P .

Ejercicios propuestos:

1. Decida cuáles de los siguientes subconjuntos de $\Re^3$ son subespacios de $\Re^3$:
a) $L = \{(x, y, z) \in \Re^3 / xy = 0\}$
b) $H = \{(x, y, z) \in \Re^3 / x = y^2\}$

2. Si M_2 es el espacio vectorial de las matrices reales de orden 2, determine para cada uno de los siguientes subconjuntos si es o no un subespacio de M_2:

a) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2 / a > 0 \quad y \quad d = 0 \right\}$

b) $S=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2 \ / \ a=b=c=d\right\}$

c) $T=\{A\in M_2 \ / \ A$ es antisimétrica$\}$

d) $U=\{A\in M_2 \ / \ \det(A)=0\}$.

3. Si $W=\{p(x)\in P \ /$ el término independiente de $p(x)$ es $0\}$, determine si W es o no un subespacio de P.

4. Si W es el conjunto de vectores en $\Re^3$ cuya primera coordenada es 2, es decir $W=\{(x,y,z)\in\Re^3 \ / \ x=2\}$, justifique por qué W no es un subespacio de $\Re^3$

5. Decida si el conjunto de las funciones derivables en un intervalo abierto I, son un subespacio del conjunto de las funciones derivables para todo número real.

Autoevaluación

En cada caso decidir si la afirmación es verdadera (V) ó falsa (F):

1. $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in M_{3x1} \ / \ 2x-y-12z=1\right\}$ es un espacio vectorial.

2. $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in M_{3x1} \ / \ z=1\right\}$ es un subespacio de M_{3x1} .

3. El conjunto de las matrices diagonales de orden 3 es un subespacio del conjunto de matrices de orden 3.

4. **w** = $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ se puede expresar en términos de **u** = $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ y **v** = $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, es decir se pueden encontrar 2 reales r y s tales que: **w** = r **u** + s **v**

5. El conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo: $\begin{cases} 3x+2y-z+w=0 \\ -x+y+12w=0 \\ 2x+3y-z+13w=0 \end{cases}$ es un subespacio de los vectores en $\Re^4$.

5.2. BASES Y DIMENSIÓN

En términos generales, una “base” para un espacio vectorial es un conjunto de vectores del espacio, a partir de los cuales se puede obtener cualquier otro vector de dicho espacio, haciendo uso de las operaciones en él definidas.

5.2.1. Generador de un espacio vectorial

Para comprender la definición de generador de un espacio vectorial se debe tener claro el concepto de “combinación lineal” de un conjunto de vectores, el cual se define a continuación.

Definición: Dado un conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de vectores en un espacio vectorial V, se llama COMBINACIÓN LINEAL (C.L.) de los vectores de S, a una suma de múltiplos escalares de ellos de la forma:

$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3+\ldots+c_n\mathbf{v}_n$ donde: $c_1, c_2,\ldots,c_n$ son escalares.

Si $\mathbf{v}\in V$ y $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3+\ldots+c_n\mathbf{v}_n$ se dice que **v** se ha expresado como C.L. de los vectores de S.

Ejemplos:

1. Dado el conjunto $S = \{(2,3)\,;(1,4)\}\subset\Re^2$:

a) Escriba una C. L. de los vectores de S.

Solución:
$3\,(2,3)+(-1)\,(1,4)$ es una combinación lineal y (5,5) es el vector resultante porque:
3 (2 , 3) + (-1) (1,4) = (6,9) + (-1,-4) = (5,5) .

Otras C. L. de vectores de S son:

- $(-\frac{47}{60})\,(2,3)+\frac{9}{10}\,(1,4)=(-\frac{2}{3},\frac{5}{4})$
- $1\,(2,3)+0\,(1,4)=(2,3)$
- $0\,(2,3)+0\,(1,4)=(0,0)$

b) Proponga combinaciones lineales de los vectores de S para los vectores: (1,4); (3,7) ; (1,-1) y (-1,1).

Solución: En cada caso la C. L. es única.

(1,4) = 0 (2,3) + 1 (1,4)
(3,7) = 1 (2,3) + 1 (1,4)
(1,-1) = 1 (2,3) + (-1) (1,4)
(-1,1) = (-1) (2,3) + 1 (1,4)

c) Es posible encontrar algún vector de $\Re^2$ que no se pueda expresar como C. L. de los vectores de S? Justifique por qué sí o por qué no.

Solución:
Como (2,3) y (1,4) son vectores no paralelos (ver sección 4.1.2) cualquier vector de $\Re^2$ se puede expresar como combinación lineal de ellos.

d) Proponga un planteamiento general para expresar un vector $(x, y) \in \Re^2$ como C. L. de los vectores de S.

Solución:
Si (x, y) se puede expresar como C.L. de los vectores de S, deben existir escalares c_1 y c_2 tales que: $(x, y) = c_1(2, 3) + c_2(1, 4)$.

Aplicando las propiedades de las operaciones con vectores en $\Re^2$ se tiene:

$x = 2c_1 + 1c_2$ y $y = 3c_1 + 4c_2$ sistema de ecuaciones lineales de orden 2 ,

el cual debe tener al menos una solución para que se pueda escribir la combinación lineal de los vectores de S .

2. Si $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, entonces:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ se puede expresar como C.L. de los elementos de S.

Justificación: $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ se puede expresar como C.L. de los elementos de S con constantes diferentes a las utilizadas en la parte a).

Justificación: $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ó

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Escriba otra posibilidad.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ no se puede expresar como C. L. de los elementos de S

Justificación: Si se aplica la definición de C. L. tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la anterior C. L. se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 1\cdot c_1 + 0\cdot c_2 + 1\cdot c_3 &= 1 \\ 0\cdot c_1 + 2\cdot c_2 + 2\cdot c_3 &= 2 \\ 0\cdot c_1 + 0\cdot c_2 + 0\cdot c_3 &= 5 \\ 0\cdot c_1 + 0\cdot c_2 + 0\cdot c_3 &= 0 \end{aligned}$$

el cual presenta la inconsistencia $0 = 5$ en la tercera ecuación, lo que significa que el sistema no tiene solución, es decir no existen constantes c_1, c_2, c_3, que permitan expresar la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ como C.L. de S.

3. Si S = $\{1+x\ ;\ x^2\ ;\ 3\} \subset P_2$ podemos expresar los siguientes polinomios como C.L. de los elementos de S: a) x^2+x+4 b) $2x-7$

Justificación:

a) $x^2 + x + 4 = 1 \cdot (1+x) + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot 3$

b) $2x - 7 = 2 \cdot (1+x) + 0 \cdot x^2 + (-3) \cdot 3$

Ejercicio propuesto:

Encuentre combinaciones lineales de los elementos de S para los siguientes polinomios:

a) $-3x^2 + \dfrac{2}{3}$. b) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{3} + 1$. c) $2x^2 - 3x$.

Definición: Un subconjunto $G = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de un espacio vectorial V se llama GENERADOR DEL ESPACIO VECTORIAL V, si para todo $\mathbf{v} \in V$, existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tales que $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k$

Esto significa que un conjunto es generador de un espacio vectorial, si cualquier vector del espacio se puede expresar como combinación lineal de los elementos del conjunto generador.

Notación: Se escribe $G = gen\ \langle V \rangle$, y se lee: "G es el conjunto generador del espacio vectorial V".

Ejemplos:

1. $G = \{(2,3);(1,4)\} \subset \Re^2$ es un generador de $\Re^2$. $G = gen\ \langle \Re^2 \rangle$.

Justificación:

Cualquier vector de $\Re^2$ es de la forma (a, b) y aplicando la definición de generador, se tiene $(a,b) = c_1(2,3) + c_2(1,4)$.

Utilizando las definiciones de suma, multiplicación escalar e igualdad entre vectores, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{l} 2 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 = a \\ 3 \cdot c_1 + 4 \cdot c_2 = b \end{array}$$, cuyo determinante es $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$.

Por tanto, el sistema tiene solución única, es decir, siempre podemos encontrar constantes c_1 y c_2 para la C.L., independientemente de los valores para las constantes a y b.

Lo anterior implica que todo vector de $\Re^2$ se puede expresar como C.L. de los vectores de G, en consecuencia G es generador de $\Re^2$.

2. $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ no es un generador de M_2.

Justificación:
Cualquier vector de M_2 es de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y si T es generador, deben existir escalares c_1, c_2, c_3 tales que para toda matriz de orden 2 se tiene:

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de lo que se deduce: $\begin{array}{l} a = c_1 + c_3 \\ b = 2 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{array}$.

Como se puede observar, para que este sistema tenga solución es necesario que $c = d = 0$, por tanto, la definición no se cumple para cualquier matriz cuadrada de orden 2, sino sólo para matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $S = \{1 + x, x^2, 3\} \subset P_2$ es un generador de P_2.

Justificación:
Cualquier polinomio de grado ≤ 2 es de la forma $ax^2 + bx + c$ y se puede expresar como:

$ax^2 + bx + c = c_1(1 + x) + c_2 x^2 + c_3 3 = c_2 x^2 + c_1 x + (c_1 + 3c_3)$ de lo que se deduce

$$a = c_2$$
$$b = c_1$$
$$c = c_1 + 3c_3 \Rightarrow 3c_3 = c - c_1 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{3}(c - c_1) \Rightarrow c_3 = \frac{1}{3}(c - b)$$

Por lo tanto, para cualquier a, b y c existen las constantes c_1, c_2, c_3 que permiten expresar el polinomio $ax^2 + bx + c$ como C.L. de los elementos de S.

Veamos algunos casos particulares:

a) Para $2x^2-3x+4$, a = 2, b = -3, c = 4 $\Rightarrow$ $c_1=-3$, $c_2=2$, $c_3=7/3$

Entonces: $2x^2-3x+4=-3(1+x)+2x^2+\frac{7}{3}\cdot 3$

b) Para $5x+1$, a = 0, b = 5, c = 1 $\Rightarrow$ $c_1=5$, $c_2=0$, $c_3=-4/3$

Entonces: $5x+1=5(1+x)+(-\frac{4}{3})\cdot 3$

c) Encuentre las C.L. que corresponden a los siguientes polinomios:

1) $3x^2-3$ 2) $1+x+x^2$ 3) $4x-3x^2$

Nota: De los ejemplos anteriores se deduce que si el sistema de ecuaciones que se forma tiene solución, el conjunto es un generador del espacio vectorial correspondiente.

5.2.2. Dependencia e independencia lineal

Estos conceptos que fueron definidos e interpretados para $\Re^2$ y $\Re^3$ en la sección 4.1.2., en esta sección serán generalizados para cualquier espacio vectorial.

Definición: Dado un subconjunto $S=\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de un espacio vectorial V, se dice que S es LINEALMENTE DEPENDIENTE (L.D.) si alguno de los vectores de S se puede expresar como combinación lineal de los restantes, es decir, si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que:

$$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\ldots+c_n\mathbf{v}_n=0. \text{ con algún } c_i \neq 0$$

En caso contrario se dice que el conjunto S es LINEALMENTE INDEPENDIENTE (L.I.), es decir, una combinación lineal de los de los vectores de S que sea igual al vector nulo solo es posible con todos los escalares iguales a cero:

S es L.I. Si $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = 0$ solo cuando $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Ejemplos:

1. Decidir si $S = \{(2,3);(1,4)\} \subset \Re^2$ es L. I. ó L. D.

Solución:
En cualquiera de los 2 casos L.I. ó L.D. se debe hacer una C.L. de los vectores de S que sea igual al vector nulo.

Entonces $c_1\,(2,3) + c_2\,(1,4) = (0.0)$ de la cual se deduce $\begin{matrix} 2\cdot c_1 + c_2 = 0 \\ 3\cdot c_1 + 4\cdot c_2 = 0 \end{matrix}$

El sistema tiene solución única, porque al calcular $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, y por ser un sistema homogéneo, esta solución es la trivial, es decir: $c_1 = c_2 = 0$. Podemos concluir por lo tanto, que el conjunto S es un conjunto L. I.

2. Decidir si $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset M_2$ es L. I.

Solución:
Se parte de la C.L. de los elementos de T igualada a la matriz nula de orden 2 (el módulo de la suma en M_2).

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 + c_3 = 0 \\ 2\cdot c_2 + 2\cdot c_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = -c_3 \\ c_2 = -c_3 \end{matrix}$$

Como se forma un sistema lineal homogéneo con menos ecuaciones que variables, el sistema tiene infinitas soluciones. Es decir, se pueden encontrar escalares c_1, c_2, c_3 no necesariamente todos iguales a cero, para los cuales la matriz nula es C.L. de los elementos de T.

Por ejemplo, si $c_3 = 0 \Rightarrow c_1 = -1 = c_2$, el resultado de la C.L. es : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Se concluye entonces que el conjunto T es un conjunto L.D.

3. Compruebe que $R=\{x^2; x+1; 3\}\subset P_2$ es un conjunto L.I.

Justificación:
Aplicando la definición tenemos: $c_1 x^2 + c_2(x+1) + c_3 = 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 0.$

Igualando coeficientes se forma el sistema de ecuaciones
$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= 0 \\ c_2 + c_3 &= 0 \Rightarrow c_3 = 0 \end{aligned}$$

del cual se deduce: $c_1 = c_2 = c_3 = 0.$
Se concluye de lo anterior que R es un conjunto L.I.

Nota: Como puede observarse en los ejemplos anteriores, al tratar de determinar la dependencia o independencia lineal de un conjunto de vectores, se forma un sistema de ecuaciones lineales que siempre tiene solución por ser un sistema homogéneo.

Si la solución es única, todas las constantes son cero y el conjunto es linealmente independiente.

Si el sistema tiene infinitas soluciones, no necesariamente todas las constantes son cero y el conjunto es linealmente dependiente.

Estas conclusiones se resumen en los siguientes teoremas:

Teorema: Si un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de vectores columna de $\Re^n$ es linealmente independiente, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) El determinante de la matriz $[\,\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2 \ldots \mathbf{v}_n\,]$ es diferente de cero.
(2) La matriz $[\,\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2 \ldots \mathbf{v}_n\,]$ es invertible.
(3) La matriz $[\,\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2 \ldots \mathbf{v}_n\,]$ es equivalente por filas a la matriz idéntica I_n.

Este teorema, constituye un criterio para decidir si un conjunto de vectores es linealmente independiente. Dado que al aplicar la definición de independencia lineal se obtiene un sistema de ecuaciones cuya solución debe ser única, el teorema recoge las condiciones para que esto suceda.

Teorema: Si un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de vectores columna en $\Re^n$ es linealmente dependiente las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(1) $\det([\,\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2 \ldots \mathbf{v}_n]) = 0$.
(2) $[\,\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2 \ldots \mathbf{v}_n]$ es una matriz singular (no invertible).
(3) $[\,\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2 \ldots \mathbf{v}_n]$ no es equivalente por filas a I_n.

En este teorema se resumen los criterios para que un sistema de ecuaciones lineales tenga infinitas soluciones, que es lo que debe suceder con el sistema de ecuaciones que se forma al aplicar la definición de dependencia lineal a un conjunto de vectores.

Teorema: En $\Re^n$ un conjunto de vectores linealmente independientes contiene a lo más n vectores.

Como cada vector de $\Re^n$ tiene n componentes, con mas de n vectores se formaría una matriz con menos filas que columnas y en consecuencia sería imposible tener una matriz equivalente a la matriz idéntica (condición para que un conjunto de vectores sea L.I.).

Ejemplos:

1. Decidir si $T = \{(2,-1);(3,-4)\}$ es un conjunto L.I. ó L.D.

Solución:

Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ el conjunto T es L.I.

Note que cada vector del conjunto se toma como columna del determinante.

2. Determinar si : $S = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es L.I. ó L.D.

Solución:

Como $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12-4+24-8=0$,entonces el conjunto S es L.D.

3. Determinar si $R=\{2x^2+1\,;3x-2\,,4\}$ es un conjunto L.I. ó L.D.

Solución:
En este caso primero se expresa cada polinomio como un vector columna, así ax^2+bx+c queda representado por el vector $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Para los elementos del conjunto R estos vectores son: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ respectivamente.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$ se concluye que el conjunto R es L.I.

4. Decidir si el conjunto $H=\{(1,3,0);(-1,0,1);(2,0,2);(0,3,1)\}$ es L.I. o L.D.

Solución:

Como H es un subconjunto de $\Re^3$ con 4 vectores, se concluye que el conjunto no puede ser L. I. es decir H es un conjunto L.D.

Ejercicio propuesto:

Haciendo un proceso análogo al del ejemplo 3 decidir si el conjunto

$\left\{\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ es L.I. o L.D.

5.2.3. Bases y dimensión de un espacio vectorial

Una "base" de un espacio vectorial es un conjunto de vectores a partir de los cuales se obtienen en forma única todos los elementos del espacio. Además determina la "dimensión" del espacio vectorial, que geométricamente indica las direcciones de desplazamiento dentro de él.

Definición: Un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de vectores en un espacio vectorial V se llama BASE de V, si es un conjunto linealmente independiente y generador de V.

Definición: Se llama DIMENSIÓN de un espacio vectorial V al número de vectores que hay en cualquiera de sus bases. Se denota dim (V).

Ejemplos:

1. El conjunto $B = \{(2,3)\,;(1,4)\}$ es una base de $\Re^2$.

Justificación:

En el ejemplo 1 de las secciones 5.2.1. y 5.2.2. se comprobó respectivamente, que el conjunto B es un generador de $\Re^2$ y que también es L.I. por lo que se puede concluir que este conjunto es una base de $\Re^2$.

Como B tiene 2 vectores, entonces dim$(\Re^2) = 2$.

2. El conjunto $B = \{(3,1,-2)\,;(1,0,5)\,;(-6,-2,4)\}$ no es una base de $\Re^3$.

Justificación:

Como $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$ el conjunto B no es L. I.

por tanto no puede ser una base para $\Re^3$.

3. El conjunto $T=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$ no es una base para M_2

Justificación:
Aunque este conjunto es L.I. (compruébelo) no es generador. Veamos por qué:

Si T es generador de M_2 cualquier matriz $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, se puede expresar en la forma

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1+3c_2+c_3=a\\ c_2=b\\ 2c_1=c\\ 0=d\end{array}$$

La última ecuación d = 0 significa que esta C.L. sólo es posible para matrices de la forma $\begin{pmatrix}a & b\\ c & 0\end{pmatrix}$, por lo tanto, T no es un generador de M_2 y en consecuencia no es una base de este espacio vectorial.

4. Encuentre valores de la constante λ para que el conjunto $\{(1,0,0);(\lambda,1,0);(\lambda^2,\lambda,1)\}$ sea una base de $\Re^3$.

Solución:
Como el conjunto debe ser L.I. encontraremos los valores de λ para que el determinante correspondiente sea diferente de cero:

Pero $\begin{vmatrix}1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & 1 & \lambda\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1$ independientemente del valor que tome λ lo cual implica que el conjunto es L.I. Además es generador, porque cualquier sistema de ecuaciones que le corresponda tiene solución única.

Nota: Como λ puede tomar diferentes valores y el conjunto no deja de ser generador, para cada valor de λ se tiene un conjunto diferente lo que significa que "la base de un espacio vectorial no es única".

Interpretación geométrica:

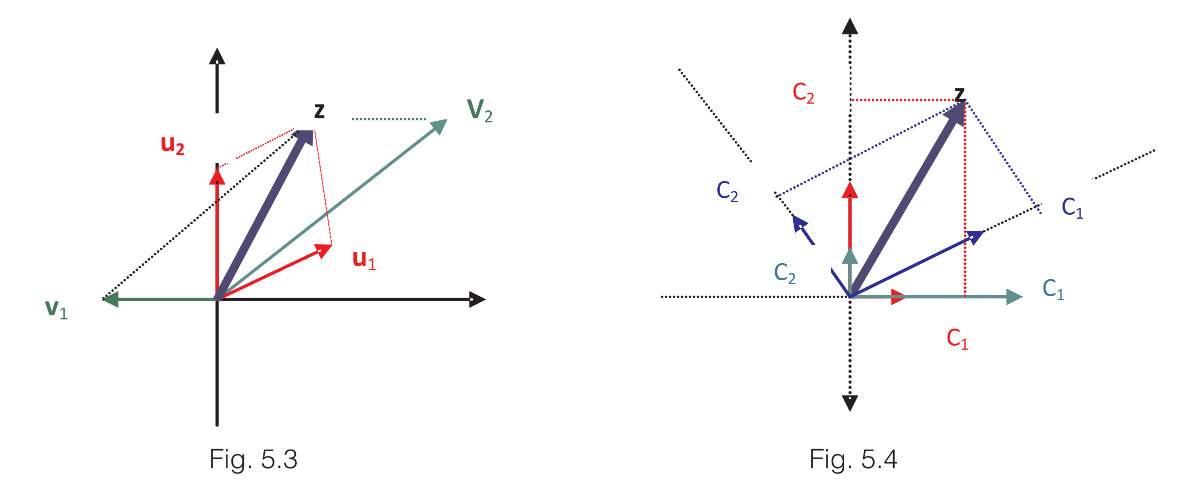


Fig. 5.3

Fig. 5.4

La figura 5.3 nos muestra que el mismo vector **z** $\in \Re^2$ es C.L. de bases diferentes: {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$} (roja) y {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$} (verde), es decir:

z = 1$\mathbf{u}_1$ + 1$\mathbf{u}_2$ y **z** = 1$\mathbf{v}_1$ + 1$\mathbf{v}_2$ los mismos escalares pero con vectores diferentes.

La figura 5.4 nos muestra el vector **z** $\in \Re^2$ como C.L. de tres bases diferentes: roja, verde y azul, pero esta vez con escalares diferentes c_1 y c_2 para cada base : **z** = $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$.

Los teoremas que a continuación se enuncian, hacen referencia a las características de cualquier base de un espacio vectorial.

Teorema: Si $B_1 = \{\mathbf{v}1 , \mathbf{v}_2 , . . . , \mathbf{v}_n\}$ y $B_1 = \{\mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , . . . , \mathbf{u}_m\}$ son bases de un mismo espacio vectorial V entonces n = m.

Es decir, cualquier par de bases de un mismo espacio vectorial tienen la misma cantidad de elementos.

Teorema: Si B = {**v**1 , $\mathbf{v}_2$, . . . , $\mathbf{v}_n$} es un subconjunto L.I. de un espacio vectorial V de dimensión n, entonces B es base de V .

Esto quiere decir que cualquier conjunto de n vectores L.I. generan un espacio vectorial de dimensión n.

Teorema: Dada una base B de un espacio vectorial V , todo vector de V puede ser expresado en forma única como C.L. de los vectores de B.

Si B es una base debe ser un conjunto generador y linealmente independiente. Por ser generador, todo vector es combinación lineal de sus elementos. Por ser linealmente independiente, las constantes de la C.L. son únicas.

Para todo espacio vectorial existe una base muy particular llamada "base ortonormada" también conocida como base NATURAL o CANÓNICA .

Definición: Se llama BASE ORTONORMADA de un espacio vectorial V de dimensión n, a una base $\{\mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \ldots , \mathbf{e}_n\}$ con las siguientes características:
(1) Todos los vectores de la base son unitarios $\| \mathbf{e}_{ii} \| = 1$, $\forall$i.
(2) Todo par de vectores diferentes son ortogonales $\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_{jj} = 0$, $\forall$i , j si $i \neq j$.

Ejemplos:

1. La base canónica para $\Re^2$ es {(1,0) ; (0,1)} , porque:

$\|(0,1)\| = 1 = \|(1,0)\|$ y (0, 1)$\bullet$(1, 0) = 0.

2. La base canónica para $\Re^3$ es {(1, 0, 0) ; (0, 1, 0) ; (0, 0, 1)} por la misma razón que en $\Re^2$: los 3 vectores son unitarios y el producto escalar entre dos de ellos es cero.

3. La base canónica para M_2 es $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ y

en forma de vectores columna en $\Re^4$ es $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

La norma y el producto punto para cualquier par de vectores corresponden a la generalización de vectores en $\Re^n$

4. La base canónica para P_2 (polinomios de grado ≤ 2) es $\{1, x, x^2\}$ y en forma de

vectores en $\Re^3$ es $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ análogamente al ejemplo anterior.

5. La base canónica del espacio vectorial $\Re^n$ es: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\.\\.\\.\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\.\\.\\.\\0\end{pmatrix};\ .\ .\ .\ ;\begin{pmatrix}0\\0\\.\\.\\.\\1\end{pmatrix}\right\}$

6. Algunos vectores de diferentes espacios vectoriales en términos de la base canónica correspondiente:

a) (3, 1, -2) $\in \Re^3$ $\Rightarrow$ (3, 1, -2) = 3 (1, 0, 0) + 1 (0, 1, 0) + (-2) (0, 0, 1).

b) $\begin{pmatrix}4 & -2\\0 & 3\end{pmatrix} \in M_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}4 & -2\\0 & 3\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

c) $(4x^2 - 5x + 3) \in P_2 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - 5x + 3 = 4x^2 + (-5)x + 3 \cdot 1.$

Ejercicios resueltos:

1. Dado el sistema lineal homogéneo $\begin{matrix} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{matrix}$ hallar:

a) el conjunto solución del sistema y comprobar que es un subespacio de $\Re^4$
b) una base para este subespacio y decir cual es su dimensión.

Solución:

a) Se toma la matriz de coeficientes del sistema para llevarla a la forma reducida por filas

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 1\\1 & -1 & 1 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 1\\0 & -3 & 4 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 1\\0 & 1 & -4/3 & -1/3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & -1/3 & 5/3\\0 & 1 & -4/3 & -1/3\end{pmatrix}$$

se escribe el sistema homogéneo asociado a la matriz:

$$x_1 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 = 0 \qquad \qquad x_1 = \frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4$$
$$\Rightarrow$$
$$x_2 - \frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 0 \qquad \qquad x_2 = \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4$$

Haciendo $x_3 = r$ y $x_4 = s$ se deduce la solución general

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}r - \frac{5}{3}s \\ \frac{4}{3}r + \frac{1}{3}s \\ r \\ s \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$, donde $r, s \in \Re$.

Como se puede observar, cualquier solución $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ del sistema de ecuaciones se obtiene

de una C.L. de los vectores $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, por lo que

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es el conjunto generador de todas las soluciones del sistema de ecuaciones. En consecuencia, el conjunto de soluciones es un subespacio de $\Re^4$.

b) Como $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es el conjunto generador del conjunto solución y además los

dos vectores son L. I. porque $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = 0$ solo si $c_1 = c_2 = 0$.

$$c_1\begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -5/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{1}{3}c_1 - \frac{5}{3}c_2 = 0 \\ \frac{4}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{matrix}$$

Entonces, el conjunto {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$} es una base del espacio solución del sistema de ecuaciones y por tanto su dimensión es 2.

2. Exprese el vector **v** = (1, 7, -4) como combinación lineal de los vectores: $\mathbf{v}_1$ = (1, -3, 2) y $\mathbf{v}_2$ = (2, -1, 1).

Solución:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} \;\Rightarrow\; c_1(1,-3,2)+c_2(2,-1,1)=(1,7,-4) \;\Rightarrow\; \begin{aligned} c_1+2c_2&=1\\ -3c_1-2c_2&=7\\ 2c_1+c_2&=-4 \end{aligned}$$

Utilizando el método de reducción de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1\\ -3 & -1 & 7\\ 2 & 1 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1\\ 0 & 5 & 10\\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \;\Rightarrow\; \begin{aligned} c_1&=-3\\ c_2&=2 \end{aligned}$$

Por tanto: (1, 7, -4) = -3 (1, -3, 2) + 2 (2, -1, 1) es la C.L. pedida.

3. Dado $U=\{2x^2+3x-4,\, x^2-2x+3\}\subset P_2$ determinar si los siguientes polinomios pertenecen o no al subespacio generado por U

a) $3x^2+8x-5$ b) $4x^2-6x+1$

Solución:

Si los polinomios están en el espacio generado por U, deben poderse expresar como C. L. de los elementos de U.

a) $$c_1(2x^2+3x-4)+c_2(x^2-2x-3)=3x^2+8x-5 \;\Rightarrow\; \begin{aligned} 2c_1+c_2&=3\\ 3c_1-2c_2&=8\\ -4c_1-3c_2&=-5 \end{aligned}$$

Aplicando reducción de Gauss-Jordan se tiene:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3\\ 3 & -2 & 8\\ -4 & -3 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 5\\ 3 & -2 & 8\\ -4 & -3 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 5\\ 0 & 7 & -7\\ 0 & -15 & 15 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \;\Rightarrow\; \begin{aligned} c_1&=2\\ c_2&=-1 \end{aligned}$$

Luego $3x^2+8x-5=2(2x^2+3x-4)-1(x^2-2x-3)$ es C. L. de los elementos de U

b) $c_1(2x^2+3x-4)+c_2(x^2-2x-3)=4x^2-6x+1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 2c_1+c_2=4 \\ 3c_1-2c_2=-6 \\ -4c_1-3c_2=1 \end{array}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -6 \\ -4 & -3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -10 \\ 3 & -2 & -6 \\ -4 & -3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -10 \\ 0 & 7 & 24 \\ 0 & 15 & -39 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2/7 \\ 0 & 1 & 24/7 \\ 0 & 0 & 87/7 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} c_1=2/7 \\ c_2=24/7 \\ 0=87/7 \end{array}$$

La última igualdad 0 = 87/7 nos indica que el sistema es inconsistente entonces no existen c_1, c_2 que permitan expresar el polinomio como C.L. de U, es decir el polinomio no está en el espacio generado por U,

4. Hallar las condiciones sobre a , b y c tales que (a, b, c) $\in \Re^3$ sea generado por **v**$_1$ = (2, 1, 0) , **v**$_2$ = (1, -1, 2) , **v**$_3$ = (0, 3, -4).

Solución:

Se expresa (a, b ,c) como C.L. de **v**$_1$, **v**$_2$ y **v**$_3$.

(a, b, c) = $c_1(2,1,0)+c_2(1,-1,2)+c_3(0,3,-4) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 2c_1+c_2=a \\ c_1-c_2+3c_3=b \\ 2c_2-4c_3=c \end{array}$

Se resuelve el sistema utilizando el método de eliminación de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 3 & b \\ 0 & 2 & -4 & c \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & b \\ 2 & 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & -4 & c \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & a \\ 0 & 3 & -6 & a-2b \\ 0 & 2 & -4 & c \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & a \\ 0 & 1 & -2 & a-2b-c \\ 0 & 2 & -4 & c \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & a \\ 0 & 1 & -2 & a-2b-c \\ 0 & 0 & 0 & 3c-2a+4b \end{array}\right)$$

Para que el sistema no presente inconsistencia es decir para que tenga solución, se debe tener la condición: 3c – 2a + 4b = 0.

Ejercicios propuestos:

1. Decida si cada uno de los siguientes conjuntos constituye o no una base para el espacio vectorial $\Re^4$:

a) {(1, 2, 1, -2) ; (0, -2, -2, 0) ; (0, 2, 3, 1) ; (3, 0, -3, 6)}
b) {(1, 4, -2, 1) ; (3, 11, -4, 4) ; (-1, -3, 4, 2) ; (2, 9, -3, 4)}

2. Encuentre una base para el espacio vectorial de las matrices reales de orden 3x2. ¿Cuál es la dimensión de este espacio?

3. ¿Cuál es la dimensión del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n ?. Justifique su respuesta.

4. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son bases para P_2 (polinomios de grado 2)?

a) { $-x^2+x+2$; $2x^2+x+3$; $4x^2-1$ }
b) { x^2+2x-1 , $2x^2+3x-2$ }
c) { x^2+1 ; $3x^2+2x$; $3x^2+2x+1$; $6x^2+6x+3$ }

5. Si P_n es el conjunto de todos los polinomios en x de grado menor o igual a n, decida ¿Cuál es la dimensión de P_3 ? ¿De P_4 ? . Justifique sus respuestas.

5.3. APLICACIONES

En las secciones anteriores se introdujo el concepto de base de un espacio vectorial a partir de las definiciones de independencia lineal y conjunto generador. La aplicación de estos conceptos conlleva siempre la solución de un sistema de ecuaciones lineales, generalmente mediante métodos matriciales.

En esta sección nos detendremos en dos casos particulares de manejo matricial:

- Una matriz A de orden mxn asociada a un sistema de ecuaciones lineales del mismo orden, cuya forma reducida por filas permite encontrar una base del espacio solución de dicho sistema.

- Una matriz que nos permite en forma práctica cambiar la base de un espacio vectorial, teniendo en cuenta que la base de un espacio vectorial no es única.

5.3.1. Rango y nulidad de una matriz

Definición: Se llama ESPACIO NULO o KERNEL de una matriz A de orden mxn, al conjunto de vectores $\mathbf{x} \in \Re^n$ tales que $A\,\mathbf{x} = 0$. Se denota Ker (A).

$$\text{Ker (A)} = \{\mathbf{x} \in \Re^n / A\,\mathbf{x} = 0\}$$

Se llama NULIDAD de A a la dimensión del kernel. Se denota ν (A).

$$\nu(A) = \dim(\text{Ker } A)$$

El kernel de una matriz A_{mxn} es el conjunto solución de un sistema lineal homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas, cuya matriz de coeficientes es A. Este conjunto es un espacio vectorial y su dimensión es la nulidad de A.

Ejemplos:

1. El sistema lineal homogéneo $\begin{matrix} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{matrix}$ se puede expresar en forma de ecuación matricial como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, donde: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

La forma reducida de A es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y el sistema homogéneo asociado es:

$$\begin{matrix} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = x_3 \end{matrix}$$

De lo anterior se concluye que el conjunto solución del sistema es:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donde cada solución se obtiene con $x_3 = r$.

Por tanto, todas las soluciones del sistema A x = 0 se obtienen del vector $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

En consecuencia: Ker (A) = gen $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y la nulidad ν (A) = 1.

2. Hallar el kernel y la nulidad de la matriz B = $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix}$.

Solución:
Se lleva la matriz a la forma reducida por filas: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Se escribe el sistema lineal homogéneo asociado a esta matriz:

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3x_2 - 2x_3$$

Se escribe el conjunto solución en forma vectorial:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2 - 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se concluye que: $\ker(B) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ y $\nu(B) = 2$.

Definición: Se llama IMAGEN de una matriz A de orden mxn al conjunto de vectores $b\in\Re^m$ tales que A **x** = b para algún vector $\mathbf{x}\in\Re^n$. Se denota Im (A)

$$\text{Im}(A) = \{\mathbf{b}\in\Re^m \,/\, A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$$

Se llama RANGO de A a la dimensión de la imagen de A. Se denota $\rho(A)$.

$$\rho(A)=\dim(\text{Im}A)$$

La imagen de A se deduce de la forma escalonada o reducida por filas de A, y queda determinada por las filas no nulas de esta matriz. El rango es el número de filas no nulas en la matriz escalonada.

Si el rango de A es igual al rango de la matriz aumentada del sistema de ecuaciones A **x** = **b**, este tiene solución, de lo contrario es inconsistente.

Ejemplos

1. Encuentre la imagen y el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix}1&2&2&-1\\1&3&1&-2\\1&1&3&0\\1&2&2&-1\end{pmatrix}$.

Solución:

Se lleva la matriz a la forma escalonada por filas: $\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

Se toman como vectores columna las filas no nulas de la matriz escalonada

Por tanto: $\text{Im}(A) = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ y $\rho(A) = 2$.

2. Encuentre la imagen y el rango de $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución:
La forma reducida de B es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, por tanto:

$$\text{Im}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } \rho(B) = 2.$$

3. Encuentre la imagen, el rango, el kernel y la nulidad de $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & -4 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix}$.

Solución:

Para determinar la imagen se lleva la matriz a la forma reducida por filas.

La forma reducida de M es $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, por tanto: $\text{Im}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ y $\rho(M) = 1$

Para determinar el kernel de M se considera la solución del sistema homogéneo asociado a la matriz reducida:

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3x_2 - 2x_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces : $\ker(M) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\nu(M) = 2$.

4. Determinar kernel, nulidad, imagen y rango de $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución:
La forma reducida de la matriz D es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Entonces: Im(D) = $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1/3\\5/3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\4/3\\-1/3\\1\end{pmatrix}\right\}$ y ρ(D) = 2.

Para hallar el kernel se escribe el sistema homogéneo asociado a la matriz reducida:

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 &= 0 \\ x_2 + \frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4 \\ x_2 &= -\frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 - x_5 \end{aligned}$$

La solución general es: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix}1/3\\-4/3\\1\\0\\0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}5/3\\1/3\\0\\1\\0\end{pmatrix} + x_5\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Entonces: Ker(D) = gen $\left\{\begin{pmatrix}1/3\\-4/3\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5/3\\1/3\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ y ν(D) = 3.

Nota: Como se puede observar en los ejemplos 3 y 4 el rango mas la nulidad de una matriz es igual al número de columnas de esa matriz.

5. Encontrar una base para el subespacio de P_3 generado por:

$S = \{x^3 + x^2 + 2x + 1; x^3 - 3x + 1; x^2 + x + 2; x + 1; x^3 + 1\}$.

Solución:

Se forma una matriz con los vectores asociados a cada polinomio del conjunto S.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ y la forma escalonada de la matriz es: $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La base del subespacio generados por S es: $B = \{x^3 + x \;\; + 2x + 1; x^2 + 5x; x; 1\}$

el espacio es de dimensión 4.

Ejercicios propuestos:

1. Encuentre el rango y la nulidad de cada una de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -4 & -6 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 3 & -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

2. Teniendo en cuenta que un sistema de ecuaciones tiene al menos una solución si la matriz de coeficientes tiene rango igual al de la matriz aumentada del sistema, determinar si cada uno de los sistemas dado tiene solución:

a)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 18 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

5.3.2. Matriz de cambio de base

Como se mostró en el ejemplo 4 de la sección 5.2.3, la base de un espacio vectorial no es única y cada vector puede ser expresado en forma única como combinación lineal de los elementos de cada base, con escalares diferentes para cada una.

En particular, para el espacio vectorial $\Re^2$, cualquier par de vectores linealmente independientes forman una base (ver figuras 5.3 y 5.4).

Consideremos 3 vectores en $\Re^2$: **x** = (5, -3); **u** = (3, 1); **v** = (1, 5). Cada uno de ellos pueden ser expresados en términos de la base canónica {**i** , **j**}, donde:
i = (1, 0) **j** = (0, 1). Así: **x** = 5**i** – 3**j** ; **u** = 3**i** + **j** ; **v** = **i** + 5**j**

Como u y v son vectores L. I. (compruébelo) forman una base para $\Re^2$.

Lo que haremos a continuación es expresar el vector **x** en términos de la base {**u** , **v**}, es decir se buscarán escalares c_1 y c_2 tales que **x** = c_1**u** + c_2**v**.

Expresando todo en términos de la base canónica se tiene:

$$5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} = c_1(3\mathbf{i} + \mathbf{j}) + c_2(\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) = (3c_1 + c_2)\,\mathbf{i} + (c_1 + 5c_2)\,\mathbf{j} \Rightarrow \begin{matrix} 3c_1 + c_2 = 5 \\ c_1 + 5c_2 = -3 \end{matrix}$$

Expresando este sistema en forma de ecuación matricial tenemos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad (AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B)$$

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$,entonces: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/14 & -1/14 \\ -1/14 & 3/14 \end{pmatrix}$ (compruébelo).

y se tiene: $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/14 & -1/14 \\ -1/14 & 3/14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Por tanto, el vector x se puede expresar como:

x = 5**i** – 3**j** en la base {**i** , **j**}.
x = 2**u** – **v** en la base {**u** , **v**}.

La matriz A^{-1} se llama "matriz de transición" o "matriz de cambio de base" de la base {**i** , **j**} a la base {**u** , **v**}.

En la matriz A se observa que sus columnas coinciden con las coordenadas de cada vector de la base {**u** , **v**} en términos de la base canónica. También se puede observar que las coordenadas del vector **x** en la base {**u** , **v**}, se obtuvieron multiplicando la matriz inversa de A por el vector **x** tomado como vector columna.

Generalizando:

Definición: Dadas 2 bases $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de un espacio vectorial V de dimensión n, se llama MATRIZ DE TRANSICIÓN o MATRIZ DE CAMBIO DE BASE de la base B_1 a la base B_2, a la matriz T cuyas columnas se forman con los escalares de las combinaciones lineales de cada vector de B_1 en términos de la base B_2.

Ejemplo:

Consideremos $B_1 = \{(3,1);(2,-1)\}$ y $B_2 = \{(2,4);(-5,3)\}$ dos bases de $\Re^2$.

a) Hallar la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2.

Solución:

Se expresa cada vector de B_1 como C.L. de los vectores de la base B_2.

$(3,1) = a_1\,(2,4) + b_1\,(-5,3) \quad \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/26 & 5/26 \\ -4/26 & 2/26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/26 \\ -10/26 \end{pmatrix}$$

$(2,-1) = a_2\,(2,4) + b_2\,(-5,3) \quad \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/26 & 5/26 \\ -4/26 & 2/26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/26 \\ -10/26 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz de cambio de la base B_1 a la base B_2 es :

$$T = \begin{pmatrix} 14/26 & 1/26 \\ -10/26 & -10/26 \end{pmatrix}$$

b) Expresar el vector (7,4) como C. L. de la base B_1 y use la matriz T para expresarlo como C. L. de la base B_2.

Solución:

Primero, se expresa **x** como C. L. de los vectores de la base B_1:

$$\mathbf{x} = (7,4) = c_1(3,1) + c_2(2,-1) \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 1/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Entonces: **x** = 3 (3,1) + (-1) (2,-1)

Para determinar las constantes a y $b$de la C. L. de **x** en B_2 se multiplica al vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ por la matriz T:

$$X = (7,4) = a\,(2,4) + b\,(-5,3) \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/26 & 1/26 \\ -10/26 & -10/26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41/26 \\ -20/26 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $(7,4) = \frac{41}{26}(2,4) + (-\frac{20}{26})(-5,3)$.

c) Recíprocamente se puede hallar la matriz de transición de la base B_2 , a la base:

B_1 que resulta ser T^{-1} la matriz inversa de T (verifíquelo).

Si $\mathbf{y} = (-\frac{13}{3},0) = -\frac{1}{2}(2,4) + \frac{2}{3}(-5,3)$, exprese y como C. L. de la base B_1.

Solución:

Como $T = \begin{pmatrix} 14/26 & 1/26 \\ -10/26 & -10/26 \end{pmatrix}$, entonces: $T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1/5 \\ -2 & -14/5 \end{pmatrix}$.

$$\text{Si } \mathbf{y} = a\,(3,1) + b\,(2,-1) \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1/5 \\ -2 & -14/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13/15 \\ -13/15 \end{pmatrix}$$

Por tanto: **y** = - $\frac{13}{15}$(3,1) - $\frac{13}{15}$ (2,-1) = $(-\frac{13}{3},0)$.

Ejercicios propuestos:

1. Exprese la matriz $D=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Muestre que el vector **y** = (2,-5,4) no pertenece al subespacio generado por los vectores **u** = (1,-3,2) y **v** = (2,-1,-1).

3. Muestre que los polinomios p(x) = (1 - x)^3 ; q(x) = (1 - x)^2 ; r(x) = 1 - x y s(x) = 1, generan al espacio vectorial P_3 de los polinomios de grado menor o igual a 3.

4. Determine la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos:

a) $\{(1,2,3,4);(4,3,2,1)\}\subset \Re^4$

b) $\left\{(-1,6,-12);(\frac{1}{2},-3-6)\right\}\subset \Re^3$

c) $\{x^3+3x+4;x^3+4x+3\}\subset P_3$

d) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\right\}\subset M_{2x3}$

5. Determine si cada uno de los siguientes conjuntos de vectores forman una base del espacio vectorial dado:

a) $\{(1,1);(3,1)\}\subset \Re^2$.

b) $\{(0,1);(0,-3)\}\subset \Re^2$.

c) $\{(2,1);(1,-1);(0,2)\}\subset \Re^2$.

d) $\{(1,3,-4);(1,4,-3);(2,3,11)\}\subset \Re^3$.

e) $\{(2,4,-3);(0,1,1);(0,1,-1)\}\subset \Re^3$.

6. Halle una base y la dimensión del espacio solución de cada uno de los siguientes sistemas homogéneos:

a) $x + 4y + 2z = 0$
$2x + y + 5z = 0$

b) $x - 2y + 7z = 0$
$2x + 3y - 2z = 0$
$2x + 3y - 2z = 0$

c) $x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0$
$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0$
$2x_1 + 4x_2 - 7x_3 + x_4 + x_5 = 0$

RESUMEN

Se llama **estructura algebraica** a un conjunto en el cual se defina una o más operaciones con ciertas propiedades. Según las propiedades que cumple la operación dentro del conjunto se distinguen diferentes estructuras.

Un **grupo conmutativo** (también llamado Abeliano) está conformado por un conjunto G en el cuál se define una operación * con las siguientes propiedades: Clausurativa: $\forall a, b \in$ G, $a * b \in$ G.

Asociativa: $(a*b)*c = a*(b*c) = a*b*c$.
Modulativa: $\exists e \in$G tal que $\forall a \in$ G, $a*e = a = e*a$.
e se llama MÓDULO para $*$ en G.
Invertiva: $\forall a \in$ G, $\exists a^{-1} \in$ G tal que $a*a^{-1} = e = a^{-1}*a$.
a^{-1} se llama INVERSO de a para la operación $*$.
Conmutativa: $a*b = b*a$.
Se denota $\langle G,* \rangle$

Un **campo** es un conjunto C en el cual se definen 2 operaciones $*$ y Δ para las cuales se cumple:
- $\langle V,* \rangle$ es un grupo conmutativo con MÓDULO $e \in C$.
- $\langle C_E, \Delta \rangle$ es un grupo conmutativo con MÓDULO $m \in C_E$.
- La operación Δ es distributiva respecto a $*$, es decir $a\Delta(b*c) = (a\Delta b)*(a\Delta c)$.

Se denota: $\langle C, *, \Delta \rangle$

Espacio vectorial (E.V.) es una estructura algebraica conformada por un grupo conmutativo $\langle V, \oplus \rangle$ relacionado con el campo de los números reales ($\Re$) mediante la operación $\otimes$ llamada multiplicación escalar que cumple las siguientes propiedades:

- $(r \otimes \mathbf{v}) \in V$, $\forall r \in \Re$ y $\forall$v$\in V$.
- $1 \otimes \mathbf{v} = \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in V$ y $1 \in \Re$.
- $(r \cdot s) \otimes \mathbf{v} = r \otimes (s \otimes \mathbf{v})$, $r, s \in \Re$ y $\mathbf{v} \in V$.
- $(r + s) \otimes \mathbf{v} = (r \otimes \mathbf{v}) \oplus (s \otimes \mathbf{v})$, $r, s \in \Re$, $\mathbf{v} \in V$.
- $r \otimes (\mathrm{u} \oplus \mathbf{v}) = (r \otimes \mathbf{u}) \oplus (r \otimes \mathbf{v})$, $r \in \Re$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Se denota $\langle V, \oplus, \otimes \rangle$, los elementos de V se llaman **vectores** y los de $\Re$ se llaman **escalares**.

Si H$\subset$ V es un espacio vectorial con las operaciones $\oplus$ y $\otimes$, entonces H es un **subespacio** de V. Para demostrarlo es suficiente comprobar que las 2 operaciones son cerradas en H, es decir:

(1) $\forall$ $a, b \in$ H, $a * b \in$ H ; (2) $(r \otimes \mathbf{v}) \in$ H, $\forall r \in \Re$ y $\forall \mathbf{v} \in$H.

Dado un conjunto S = {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, . . . , $\mathbf{v}_n$} de vectores, se dice que v es una **combinación lineal** (C.L.) de S si $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3+. . . +c_n\mathbf{v}_n$ donde $c_1, c_2,....,c_n$ son escalares.
Si V es un espacio vectorial, un subconjunto $G = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, . . . , \mathbf{v}_k\}$ de V es un **generador** de V, si para todo $\mathbf{v}\in V$, existen escalares $c_1, c_2,....,c_k$ tales que:

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+. . . +c_k\mathbf{v}_k$$

Un subconjunto S = {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, . . . , $\mathbf{v}_n$} de V, es **linealmente dependiente** (L.D.) si alguno de los vectores de S se puede expresar como combinación lineal de los restantes, es decir, si existen escalares $c_1, c_2,....,c_n$ tales que:

$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+. . . +c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{o}$. con algún $c_i \neq 0$.

S es **linealmente independiente** (L.I.) cuando $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+. . . +c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{o}$ solo si $c_1 = c_2 =...= c_n= 0$.

B = {$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, . . . , $\mathbf{v}_n$} es una **base** de V si B es un conjunto L.I. y generador de V. El número de vectores en B (en este caso n) es la **dimensión** de V.

Una **base ortonormada** de un espacio vectorial V de dimensión n, es una base {$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, . . . , $\mathbf{e}_n$} en la cual:
- Todos los vectores son unitarios (o normados): $\| \mathbf{e}_i \| = 1$, ∀i.
- Todo par de vectores diferentes son ortogonales $\mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_j = 0$, ∀i , j si i ≠ j.

El **kernel** (o espacio nulo) de una matriz A_{mxn}, es el conjunto de vectores $\mathbf{x}\in\Re^n$ tales que A **x = O**. Se denota Ker (A). La **nulidad** de A es la dimensión del kernel y se denota ν (A) = dim(Ker A).

La **imagen** de una matriz A_{mxn} es el conjunto de vectores b $\in\Re^m$ tales que
A **x = b** para algún vector $\mathbf{x}\in\Re^n$. Se denota Im (A).
El **rango** de A es la dimensión de la imagen de A. Se denota ρ (A) = dim(ImA).

Dadas 2 bases $B_1 =\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, . . . ,\mathbf{u}_n\}$ y $B_2 =\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, . . . ,\mathbf{v}_n\}$ de un espacio vectorial V de dimensión n, se llama **matriz de transición** (o matriz de cambio de base) de la base B_1 a la base B_2, a la matriz T cuyas columnas son los **vectores coordenados** de cada vector de B_1 respecto a la base B_2.

GLOSARIO

Estructura algebraica es un conjunto dotado de una o más operaciones.

Grupo conmutativo (o Abeliano) es una estructura algebraica conformada por un conjunto en el cuál se ha definido una operación Clausurativa, asociativa, conmutativa, modulativa e invertiva.

Campo es un conjunto en el cual se definen 2 operaciones con cada una de las cuales el conjunto tiene estructura de grupo conmutativo, y una de las operaciones es distributiva respecto a la otra.

Espacio vectorial (E.V.) es una estructura algebraica conformada por un grupo conmutativo relacionado con un campo mediante una operación llamada multiplicación escalar.

Vector es un elemento de un espacio vectorial.

Subespacio es un subconjunto de un espacio vectorial que conserva la estructura de espacio vectorial.

Combinación lineal (C.L.) de un conjunto de vectores es una suma de múltiplos escalares de esos vectores.

Generador de un espacio vectorial es un conjunto de vectores que permite expresar a cualquier vector del espacio como combinación lineal de ellos.

Conjunto linealmente dependiente (L.D.) es un conjunto de vectores para los cuales es posible tener una C.L. de ellos cuyo resultado sea el vector nulo, sin que todas las constantes sean cero.

Conjunto linealmente independiente **(L.I.) es un conjunto de vectores para los cuales una C.L. de ellos cuyo resultado sea el vector nulo, solo es posible con todas las constantes iguales a cero.**

Base de un espacio vectorial es un conjunto L.I. y generador del espacio vectorial.

Dimensión de un espacio vectorial es la cantidad de vectores que hay en cualquier base.

Base ortonormada es una base en la cual todos los vectores son unitarios (normados) y ortogonales dos a dos.

Imagen de una matriz es el conjunto de filas no nulas en su forma escalonada por filas.

Rango de una matriz es el número de filas no nulas en la imagen.

Kernel de una matriz es el número vectores generadores del conjunto solución del S.L.H. asociado a la matriz.

Nulidad de una matriz es el número vectores del kernel.

Matriz de transición de la base B_1 a la base B_2 es la matriz cuyas columnas son los vectores coordenados de cada vector de la base B_1 respecto a la base B_2.

Vector coordenado de un vector respecto a una base B es, el vector que se forma con las constantes de la combinación lineal para ese vector, en términos de los vectores de la base B.

AUTOEVALUACIÓN

Decida si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar la respuesta:

1. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ esta en el espacio vectorial generado por $\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$.

2. $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ genera a M_2.

3. $\{(1,0,0);(0,1,0);(1,1,0)\}$ es un conjunto linealmente independiente.

4. $\{(1,0,0);(0,2,0);(0,0,3)\}$ es una base de $\Re^3$.

5. El vector $\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$ se puede expresar en forma única como combinación lineal de

los vectores $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$.

6. $\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

7. La dimensión del espacio vectorial de las matrices de orden 2x3 es 5.

8. El rango de la matriz $\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\-1&4&-5&10\\3&2&1&-2\\3&-5&8&-16\end{pmatrix}$ es 2.

9. $\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ es una base del espacio solución del sistema de ecuaciones:

$x + 3y - 2z + 4w = 0$; $-x + 4y - 5z + 10w = 0$
$3x + 2y + z - 2w = 0$; $3x - 5y + 8z - 16w = 0$

10. Si la nulidad de una matriz A de orden 3x5 es 3 entonces el rango es 5.

En cada caso seleccione la respuesta correcta:

11. La matriz de transición de la base canónica de $P_2 \{x^2; x; 1\}$ a la base $\{x^2 - 1; x + 3; -2\}$ es:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$.

12. El rango y la nulidad de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ son respectivamente:

a) 1 y 3 . **b)** 3 y 2 . **c)** 2 y 3. **d)** 3 y 1 .

13. El siguiente conjunto no puede ser base de $\Re^3$:

a) $\left\{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}\right\}$. **b)** $\left\{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}\right\}$. **c)** $\left\{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}\right\}$. **d)** $\left\{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}\right\}$.

14. Un subconjunto de $\left\{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}\right\}$ que puede ser base de $\Re^3$ es:

a) $\left\{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{bmatrix}\right\}$. **b)** $\left\{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{bmatrix}\right\}$. **c)** $\left\{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}\right\}$. **d)** $\left\{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}\right\}$.

15. Una base para el espacio solución del sistema de ecuaciones
$x + 2y + 3z = 0$; $x - 3y + 4z = 0$; $2x - y + 7z = 0$ es

a) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\-5\\1\end{pmatrix}\right\}$. **b)** $\left\{\begin{pmatrix}-17\\1\\5\end{pmatrix}\right\}$. **c)** $\left\{\begin{pmatrix}17/5\\-1/5\\0\end{pmatrix}\right\}$. **d)** $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

RETROALIMENTACIÓN

Respuestas a los ejercicios propuestos.

Sección 5.1.1: (página 252) **3.** $\Re^2$ con el producto punto no es un grupo.

Sección 5.1.2: (página 253) **2.** $\bullet$ no es una operación modulativa en **Z**.

Sección 5.1.3: (página 256) **1.** No **2.** No **3.** Si **4.** Si

Sección 5.1.4: (página 258) **1.** a) No b) No
2. a) No b) Si c) Si d) No **3.** Si
4. La suma no es clausurativa en W **5.** Si

Secciones 5.3: (página 288) **1.** D = 2A - B + 2C
4. a) L.I. b) L.D. c) L.I. d) L.D.
5. a) Si b) No c) No d) Si e) No

Solución Autoevaluación Sección 5.1: (página 273)

1. La afirmación es **falsa** porque la suma de dos vectores del conjunto no está en el conjunto. Como la condición es $2x - y - 2z = 1$

$\Rightarrow$ $y = 2x - 2z - 1$, por tanto: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\2x-2z-1\\z\end{pmatrix}$.

Pero si se suman dos de estos vectores el resultado es un vector de la forma $\begin{pmatrix}a\\2a-2b-2\\b\end{pmatrix}$ el cual no pertenece el conjunto dado.

2. La afirmación es **falsa** porque siendo $z = 1$ para todos los vectores del conjunto, al sumar dos de ellos $z = 2$ y el vector suma no pertenece al conjunto.

3. La afirmación es **verdadera** porque la suma de 2 matrices diagonales es una matriz diagonal, y, al multiplicar una matriz diagonal por una constante el resultado sigue siendo una matriz diagonal.

4. La afirmación es **falsa** porque los vectores **u** y **v** tienen la segunda componente igual a cero, entonces multiplicadas por cualquier escalar el resultado sigue siendo cero, lo cual hace imposible tener la segunda componente de **w** igual a 2.

5. La afirmación es **verdadera** porque como el sistema es homogéneo y tiene más ecuaciones que variables, tiene infinitas soluciones. Como hay 4 variables cada solución se puede expresar como un vector de $\Re^4$, y el conjunto de todas las soluciones forman un subespacio de $\Re^4$ pues la suma de 2 soluciones es una solución y cualquier múltiplo escalar de una solución es una solución.

Solución Autoevaluación Secciones 5.2 y 5.3: (página 294)

1. La afirmación es **falsa** porque cualquier combinación lineal de los vectores del conjunto dado es un vector cuya segunda componente es cero, por tanto no se puede generar el

vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ a partir de los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. La afirmación es **verdadera** porque cualquier matriz de orden 2 se puede expresar como combinación lineal de las matrices del conjunto dado. Así:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ para cualquier a, b, c y d.

3. La afirmación es **falsa** porque el vector $(1,1,0) = (1,0,0) + (0,1,0)$, es decir uno de los vectores es C.L. de los restantes y en consecuencia el conjunto es linealmente dependiente.

4. La afirmación es **verdadera** porque el determinante que se forma tomando los correspondientes vectores columna es diferente de cero:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$ esto implica que los vectores (1,0,0) , (0,2,0) y (0,0,3) son L. I. y generadores de $\Re^3$.

5. La afirmación es **falsa** porque al hacer la correspondiente C. L. se tiene:

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 - 2c_2 - c_3 = -5 \\ -c_1 + c_2 = 4 \end{matrix}$$

La matriz aumentada del sistema de ecuaciones resultante es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

cuya forma reducida es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = -3 - c_3 \\ c_2 = 1 - c_3 \end{matrix}$

Como el sistema tiene infinitas soluciones hay muchos valores de c_1, c_2, y c_3 que permiten tener la combinación lineal que interesa. Veamos al menos dos posibilidades:

Si $c_3 = 0 \Rightarrow c_2 = 1 \quad y \quad c_1 = -3$,entonces: $\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Si $c_3 = 2 \Rightarrow c_2 = -1 \quad y \quad c_1 = -5$, entonces: $\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. La afirmación es **verdadera** porque: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ y esto es una condición suficiente para que los vectores sean linealmente dependientes.

7. La afirmación es **falsa** porque la base canónica de este conjunto es:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Por tanto, la dimensión de este espacio vectorial es 6.

8. La afirmación es **verdadera** porque al llevar la matriz a la forma reducida se tienen dos filas no nulas, las cuales determinan el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & -5 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -5 & 8 & -16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \\ 0 & -7 & 7 & -14 \\ 0 & -14 & 14 & -28 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9. La afirmación es **verdadera**. Si se observa la matriz del ejercicio anterior es precisamente la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones y de su forma reducida se deduce:

$$\begin{matrix} x = -z + 2w \\ y = z - 2w \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \right\}$$ es la base del espacio

solución del sistema de ecuaciones.

10. La afirmación es **falsa** porque si la matriz es de orden 3x5 tiene 5 columnas y si la nulidad de la matriz es 3, el rango debe ser 2 puesto que la suma del rango y la nulidad es igual al número de columnas.

11. La respuesta correcta es **b)** porque es la matriz inversa de la matriz que se forma con los vectores coordenados que le corresponden a los polinomios de la base $\{x^2 - 1, x+3, -2\}$

La matriz de los vectores es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, y su inversa es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

12. La respuesta correcta es **c)** , porque la forma reducida de la matriz

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con 2 filas no nulas, luego el

rango de la matriz inicial es 2. Como la matriz tiene 5 columnas y el rango es 2, la nulidad debe ser 3.

13. La respuesta correcta es **d)** porque el determinante que se forma con los vectores del conjunto es igual a cero, por tanto los vectores son linealmente dependientes y no pueden formar una base de $\Re^3$.

14. La respuesta correcta es **a)** porque una base de $\Re^3$ debe tener 3 vectores linealmente independientes y los 3 vectores del conjunto lo son puesto que el determinante que se forma con ellos es diferente de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -13.$

15. La respuesta correcta es **b)** porque el sistema de ecuaciones es un sistema homogéneo con infinitas soluciones porque:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ matriz de coeficientes tiene forma reducida $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 17/5 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de la cual se deduce:

$x = -\frac{17}{5}z$ y $y = \frac{1}{5}z$. Si $z = 5$ entonces $y = 1$ y $x = -17$

luego una base del espacio solución del sistema de ecuaciones es: $\left\{ \begin{pmatrix} -17 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

6. TRANSFORMACIONES LINEALES

"He oído decir a mucha gente: "Dadme las ideas..". Es imposible dar ideas si no es con las palabras más detalladamente adecuadas"

William Blake.

INTRODUCCIÓN

Conociendo el comportamiento de la estructura algebraica llamada espacio vectorial, abordaremos el estudio de las transformaciones que "conservan" la suma y el producto escalar. Se trata de funciones definidas entre dos espacios vectoriales, de tal manera que la suma de dos vectores se transforma en la suma de sus transformados y un múltiplo escalar de cualquier vector se transforma en un múltiplo escalar de su transformado.

Hay muchos fenómenos que pueden ser aproximados mediante modelos lineales y esta unidad contribuye conceptualmente en el análisis e interpretación de ellos, tal es el caso del procesamiento de imágenes y las gráficas en computadora.

OBJETIVO GENERAL

Identificar y representar matricialmente transformaciones lineales entre espacios vectoriales, en particular en el plano $\Re^2$ y en el espacio $\Re^3$, con sus correspondientes interpretaciones geométricas. Diagonalizar una matriz a partir de sus valores y vectores propios.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar funciones que sean transformaciones lineales.
- Interpretar geométricamente el efecto de una transformación lineal.
- Identificar modelos clásicos de transformaciones lineales para analizar modelos Análogos.
- Representar matricialmente las transformaciones lineales.
- Calcular los valores y vectores propios asociados a una matriz.
- Diagonalizar una matriz cuadrada.

CONTENIDO

6.1. Transformaciones lineales.
6.1.1. Definición y ejemplos.
6.1.2. Imagen y Núcleo.
6.1.3. Representación matricial.

6.2. Valores y vectores propios.
6.2.1. Valores y vectores propios de una matriz.
6.2.2. Semejanza y diagonalización de matrices.

6.1. TRANSFORMACIONES LINEALES

Las transformaciones lineales se caracterizan porque “conservan” la estructura algebraica de los conjuntos entre los que se define. En esta unidad se estudian las transformaciones lineales entre espacios vectoriales, las cuales se caracterizan porque: la imagen de una suma de vectores coincide con la suma de las imágenes de cada vector, y la imagen de un múltiplo escalar para un vector dado es un múltiplo escalar de la imagen de dicho vector.

6.1.1. Definición y ejemplos

Definición: Dados V y W espacios vectoriales, se llama TRANSFORMACIÓN LINEAL de V en W a una función L: V $\rightarrow$ W que asigna a cada vector **v** $\in$ V, un único vector w $\in$ W (denotado L (**v**)), de tal manera que:

(1) L(**u** + **v**) = L(**u**) + L(**v**) $\forall$ **u**, **v** $\in$ V
(2) L(λ.**u**) = λ. L(**u**) $\forall$ **u** $\in$ V y $\forall \lambda \in \Re$

Observación: En la propiedad (1), el + a la izquierda de la igualdad hace referencia a la suma definida en el espacio vectorial V, mientras que el + de la derecha corresponde a la suma vectorial definida en W. Así mismo, en la propiedad (2) el punto colocado entre λ y **u**, a la izquierda de la igualdad corresponde a la multiplicación escalar definida en V, mientras que el de la derecha entre λ y L(**u**), corresponde a la multiplicación escalar definida en W.

Ejemplos:

1. Dilatación-contracción:

L: $R^3 \rightarrow R^3$ definida como L(**u**) = k.**u**, con k $\in \Re$ es una transformación lineal.

Justificación:
Dados **u** = (x_1, y_1, z_1) y **v** = (x_2, y_2, z_2) vectores en $\Re^3$:

(1) L(**u**+**v**) = k.$(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$
= k.(x_1, y_1, z_1)+ k.(x_2, y_2, z_2)
= k.**u** + k.**v**
= L(**u**) + L(**v**)

(2) Si λ es un escalar: L(λ**u**) = $L(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) = k.(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$
$= \lambda.(k.x_1, k.y_1, k.z_1)$
= λ L(**u**)

Interpretación geométrica:

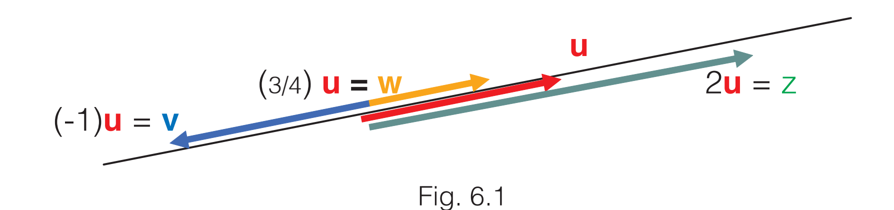


Fig. 6.1

Esta transformación aplicada a un vector **u**, lo convierte en un vector paralelo a **u**, cuya magnitud y sentido dependen de la constante k. (Figura 6.1)

Si k > 1, la norma del vector k **u** es mayor que la norma de **u**. (dilatación)
Si 0 < k < 1 la norma del vector k **u** es menor que la norma de **u**. (contracción)
Si k es negativo (k < 0), los dos vectores tienen sentido opuesto.

2. Proyecciones:

DEL PLANO SOBRE EL EJE X: se define como: $L(x, y) = (x, 0)$

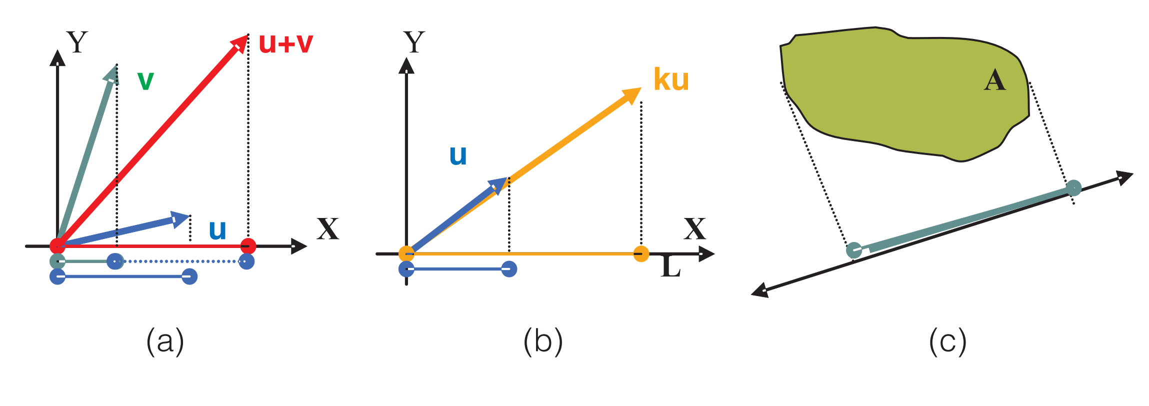


Fig. 6.2

Si **u** = (x_1, y_1) y **v** = (x_2, y_2) entonces:
L(**u**+**v**) = $L(x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1+x_2, 0) = (x_1, 0) + (x_2, 0)$ = L(**u**) + L(**v**) (Figura 6.2a)
L(k**u**) = $L(kx, ky) = (kx, 0) = k(x, 0)$ = kL(**u**) (Figura 6.2b).

En forma análoga a como se definió la proyección sobre el eje X, se puede hacer sobre el eje Y o sobre cualquier otra recta.
En general, una región **A** del plano se puede transformar en un segmento de recta, y esta transformación es lineal. (Figura 6.2c)

También se puede considerar en la proyección del espacio tridimensional sobre el plano cartesiano XY, la cual queda definida por:

L: $\Re^3 \rightarrow \Re^2$ donde $L(x, y, z) = (x, y)$ proyecta un vector de $\Re^3$ sobre un vector de $\Re^2$

Justificación:

Dados los vectores **u** $= (x_1, y_1, z_1)$ y **v** $= (x_2, y_2, z_2)$, por definición de L:

(1) L(**u**+**v**) = $L(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
$= (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$ = L(**u**) + L(**v**).
Además si λ es un escalar
(2) L(λ**u**) $= (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1, \lambda \cdot z_1) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot y_1) = \lambda.(x_1, y_1) = \lambda$ L (**u**)

Interpretación geométrica:
Esta transformación proyecta cualquier vector **u** del espacio $\Re^3$ sobre el plano cartesiano $\Re^2$ (Figura 6.3).

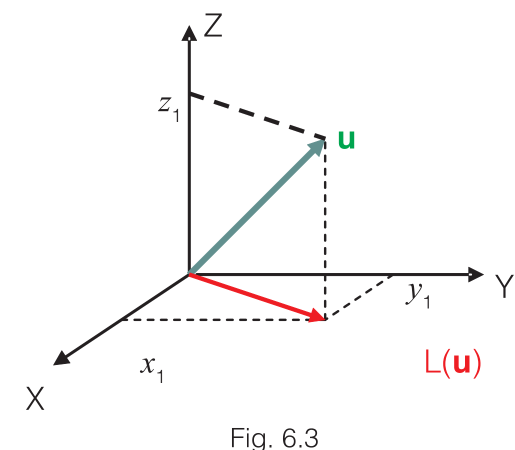


Fig. 6.3

De manera similar se puede hacer la proyección sobre cualquiera de los otros dos planos, XZ o YZ.

3. Rotaciones:
Se definen con la matriz $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ donde α es el ángulo de rotación.

Si el punto P de coordenadas (x, y) se rota un ángulo α, la imagen de P es otro punto Q de coordenadas (x´, y´).

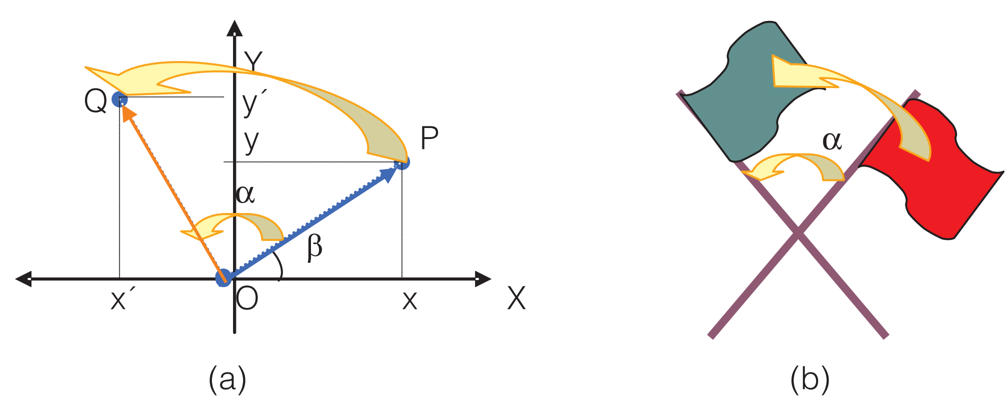


Fig. 6.4

Si r = d(O, P) = d(O, Q) entonces: x = r cos β y y = r sen β .
x' = r cos(α+ β) y y' = r sen(α+ β).
Aplicando identidades trigonométricas:
x' = r cos(α+ β) = r cosαcos β − r senαsen β = x cosα − y senα
y' = r sen(α+ β) = r senαcos β + r cosαsen β = x senα + y cosα

Los anteriores resultados se pueden expresar en forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

de donde se deduce que una rotación es una transformación lineal definida por la matriz R_α, pues cualquier vector **u** = (x, y) multiplicado por R_α da como resultado un vector **v** = (x', y') rotado α grados (figura 6.4).

Por ejemplo, si se aplica al vector de coordenadas (2, 1) una rotación de 90^0 se tiene:

$$L(2,1) = \begin{pmatrix} \cos 90^0 & -sen90^0 \\ sen90^0 & \cos 90^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ lo cual significa que la rotación

transforma al vector **u** = (2, 1) en el vector **v** = (-1, 2) (Figura 6.4a).

Justificación: Si **u** = $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y **v** = $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ son vectores de R^2 , entonces:

(1) L(**u**+**v**) = $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$(**u**+**v**)

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

= L(**u**) + L(**v**)

(2) Si λ es un escalar L(λ**u**) = $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$

$$= \lambda \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

= λ L(u)

Otras transformaciones:

4. En el espacio vectorial de las matrices de orden mxn, MULTIPLICAR POR UNA MATRIZ A_n es una transformación lineal, definida por: L: $\Re_{mxn} \longrightarrow \Re_{mxn}$ donde
L(M) = M.A para cualquier matriz $M \in \Re_{mxn}$.

Justificación:
Si E y F son matrices de orden mxn:
(1) L(E+F) = (E+F).A = E.A + F.A = L(F) + L(F)
(2) L(kM) = (kM).A = k(M.A) = kL(M)

5. En el espacio de las funciones derivables, LA DERIVADA es una transformación lineal definida como L(f) = f´.

Justificación:
(1) L(f + g) = (f +g)´ = f ´ + g ´ = L(f) + L(g).
(2) L(kf) = (kf)´ = kf ´ = kL(f).

6. En el espacio de las funciones integrables, LA INTEGRAL de f definida como
L(f(x)) = $\int f(x)dx$ es una transformación lineal.

Justificación:
$\int [A f(x)+ B g(x)]dx = A\int f(x)dx + B\int g(x)dx$.

7. Dados M_{mn} y M_{nm} espacios vectoriales de las matrices de orden mxn y nxm, respectivamente, la transformación L: $M_{mn} \rightarrow M_{nm}$ definida como L(A) = A^T es lineal.

Justificación:
Si A y B son matrices de M_{mn}
(1) L(A+B) = $(A+B)^T = A^T + B^T$ = L(A) + L(B)
(2) Si λ es un escalar: $L(\lambda A) = (\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda L(A)$

8. Si P_1 y P_2 son los espacios vectoriales formados por los polinomios de grados 1 y 2 respectivamente, L: $P_1 \rightarrow P_2$ definida como L(p(x)) = x p(x), $\forall p(x) \in P_1$ es una transformación lineal.

Justificación:

Dados $p(x) = a_1 + b_1x$ y $q(x) = a_2 + b_2x$ vectores de P_1 (polinomios de grado 1):
(1) $L (p(x) + q(x)) = x (p(x) + q(x))$
$= x [(a_1 + b_1x) + (a_2 + b_2x)]$

$= x\,[\,(a_1 + b_1x)\,] + x\,[\,(a_2 + b_2x)\,]$
$= (\,a_1x + b_1x^2\,) + (\,a_2x + b_2x^2\,)$ (polinomios de grado 2)
$= x\,p(x) + x\,q(x)$
$= L(\,p(x)\,) + L(\,q(x)\,)$.

(2) Si λ es un escalar $L(\lambda p(x)) = x(\lambda a + \lambda bx) = x\lambda(a_1 + b_1x) = \lambda L(\,p(x)\,)$

Veamos ahora algunos ejemplos de transformaciones que no son lineales:

- Desplazamientos horizontales:
EN EL PLANO: se define como $T(x, y) = (x+h, y)$ (Figura 6.3a)
EN EL ESPACIO: se define como $T(x, y, z) = (x+h, y, z)$ (Figura 6.3b)
h determina la longitud del desplazamiento sobre el eje X.

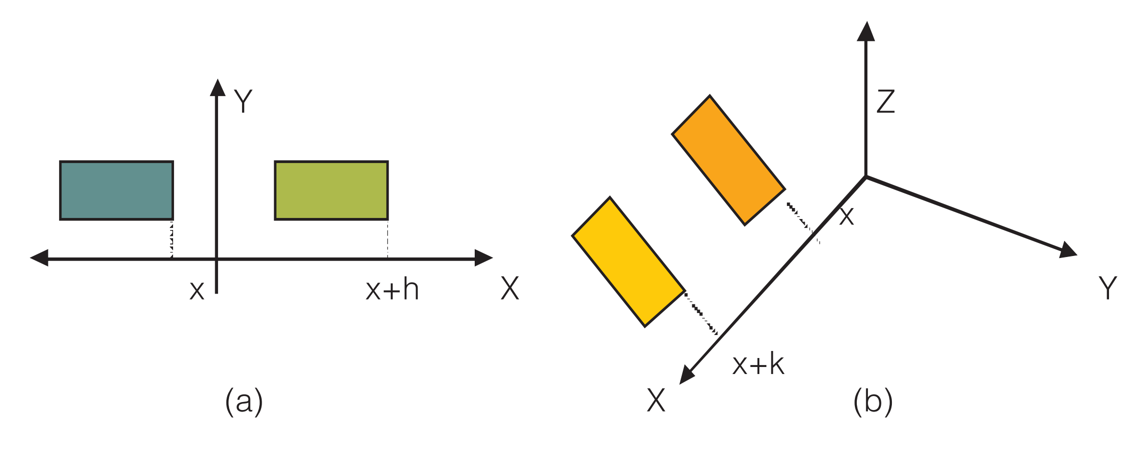


Fig. 6.5

- Desplazamientos verticales:
EN EL PLANO: se define como $T(x, y) = (x, y+k)$
EN EL ESPACIO: se define como $T(x, y, z) = (x, y$ y$+k, z)$
k es el desplazamiento sobre el eje Y .

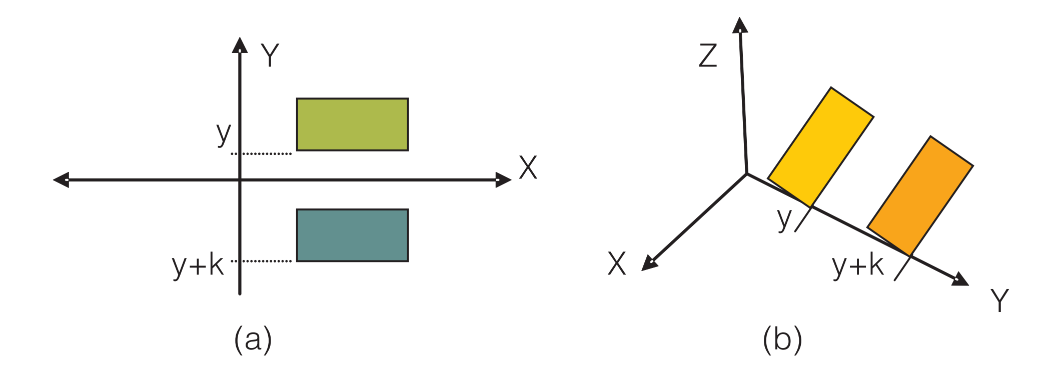


Fig. 6.6

En la figura 6.5 el rectángulo de color oscuro se desplaza hasta coincidir con el de color claro. En la Figura 6.6 el rectángulo claro se desplaza hasta coincidir con el rectángulo oscuro.

En los dos casos, la transformación del rectángulo corresponde a un desplazamiento.

- Traslaciones:

Se obtienen de la composición de dos desplazamientos, uno en la dirección de cada eje coordenado:

EN EL PLANO: $T(x, y) = (x+h, y+k)$;
EN EL ESPACIO: $T(x, y, z) = (x+h, y+k, z+l)$

h es el desplazamiento sobre el eje X, k sobre el eje Y y l sobre el eje Z.
Una traslación no es una transformación lineal porque aplicando la definición de transformación lineal, no se cumplen las condiciones:

$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ y $T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$.

Si $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2)$ son vectores del espacio $\Re^3$, entonces:

$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(x_1+y_1, x_2+y_2, z_1+z_2) = (x_1+y_1+h, x_2+y_2+k, z_1+z_2+l)$ pero
$T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v}) = (x_1+h, y_1+k, z_1+l) + (x_2+h, y_2+k, z_2+l)$
$= (x_1+y_1+2h, x_2+y_2+2k, z_1+z_2+2l) \neq T(\mathbf{u}+\mathbf{v})$

Como no se cumple la primera condición no es necesario comprobar la otra.

Nota: En cualquier caso basta con que no se cumpla una de las condiciones de la definición, para concluir que la transformación no es lineal.

Teorema: Una transformación lineal se caracteriza porque conserva la estructura algebraica de los dos conjuntos V y W, esto quiere decir que:

1. $L(\mathbf{o}_V) = \mathbf{o}_W$ la imagen del cero (módulo) de V es el cero (módulo) de W.
2. $L(-\mathbf{u}) = -L(\mathbf{u})$ el opuesto de $\mathbf{u} \in V$ es el opuesto de $L(\mathbf{u}) \in W$.

Demostración:

1. $L(\mathbf{o}_V) = L(0\mathbf{v}) = 0.L(\mathbf{v}) = 0\mathbf{w} = \mathbf{o}_W$.

2. $L(-\mathbf{u}) = L((-1)\mathbf{u}) = (-1)L(\mathbf{u}) = -L(\mathbf{u})$.

Ejemplo:

La transformación definida por $T: \Re^2 \to \Re^2$ donde $T(x, y) = (2x, 3)$ no es lineal.

Si T fuera lineal por la parte 2. del teorema anterior se debe cumplir $T(0, 0) = (0, 0)$, pero por definición se tiene: $T(0, 0) = (0, 3)$.

Ejercicios propuestos:

1. Defina la transformación lineal que proyecta un vector del plano cartesiano $\Re^2$ sobre cualquier recta del plano (diferente a los ejes coordenados).

2. Defina las dos transformaciones lineales que proyectan el espacio tridimensional $\Re^3$ sobre los planos XZ y YZ respectivamente y haga las ilustraciones gráficas correspondientes.

3. Decida para cada una de las siguientes transformaciones si es o no lineal. Justifique sus respuestas:

a) $T: V \to \Re$ donde $T(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|$ para todo vector $\mathbf{u} \in V$.

b) $T: \Re^3 \to \Re^2$ donde $T(x, y, z) = (2x-y+z, y-4z)$.

c) $T: M_{2x2} \to \Re$, donde : $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a^2 + b^2$.

d) $T: P_2 \to P_2$, donde: $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2$.

e) $T: M_{2x2} \to M_{2x3}$, donde B es una matriz fija de orden 2x3 tal que $T(A) = AB$.

4. Si $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ son vectores de un espacio vectorial V y $L: V \to \Re^3$ una transformación lineal tal que: $L(\mathbf{v}_1) = (1, -1, 2)$; $L(\mathbf{v}_2) = (0, 3, 2)$ y $L(\mathbf{v}_3) = (-3, 1, 2)$, halle $L(2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3)$.

6.1.2. Imagen y núcleo

Dos subespacios básicos asociados a toda transformación lineal son el núcleo y la imagen, conceptos que a continuación se describen.

Definición: Si L: V $\rightarrow$ W es una transformación lineal, se llama IMAGEN de L, que denotamos Im(L), al conjunto formado por todos los vectores de W que son imagen por L de algún vector de V. De esta manera, un vector **w** de W pertenece a Im(L) , si existe algún vector **v** en V ,tal que: L(**v**) = **w**.

Se denota: Im(L) = { **w**$\in$W / L(**v**) = **w** para algún **v**$\in$V }.

Si Im(L) = W se dice que la transformación lineal L es SOBREYECTIVA.

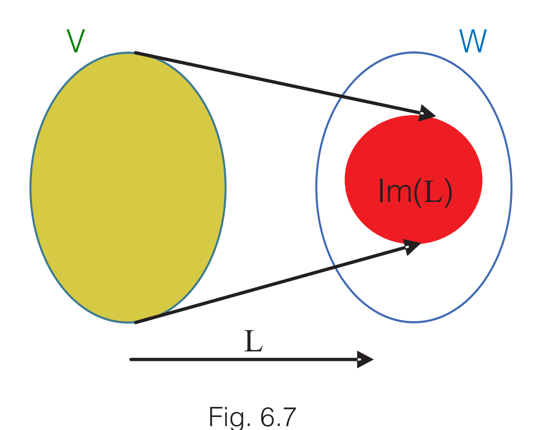


Fig. 6.7

La imagen de L es un subconjunto del codominio (W) de la transformación (Fig. 6.7).

Ejemplo:

Determinar la imagen de L: $R^3 \rightarrow R^2$ definida por L$(x, y, z) = (x, y)$.

Solución:
Si L $(x, y, z) = (x, y)$, todo vector del plano R^2 es imagen de algún vector de R^3
Por tanto la imagen de la transformación está formado por todos los vectores de R^2.

Im(L) = { **v** = $(x, y, z) \in R^3$ / x , y, $z \in R$ }= R^2.

Definición: Sean $\mathbf{o}_V$ y $\mathbf{o}_W$ los elementos neutros de los espacios vectoriales V y W, respectivamente. Se llama NÚCLEO de la transformación lineal $L: V \to W$ al conjunto de todos los vectores de V cuya imagen es $\mathbf{o}_W$.
Se designa por Ker(L) como abreviatura de Kernel (núcleo, en inglés).

Se denota: $\text{Ker}(L) = \{ \mathbf{v} \in V \,/\, L(\mathbf{v}) = \mathbf{o}_W \}$

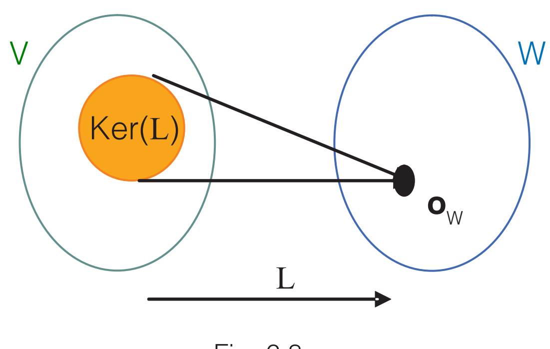


Fig. 6.8

El núcleo de L es un subconjunto del dominio (V) de la transformación (Figura 6.8).

Ejemplo:

Determinar el núcleo de L: $R^3 \to R^2$, definida por: L $(x, y, z) = (x, y)$.

Solución:
Si $L(x, y, z) = (0, 0)$ entonces $(x, y) = (0, 0)$ luego $x = 0$ y $y = 0$.
Por lo tanto el núcleo de la transformación está formado por todos los vectores de la forma $(0, 0, z)$ ya que $L(0, 0, z) = (0, 0)$.

$\text{Ker}(L) = \{ \mathbf{v} = (x, y, z) \in \Re^3 \,/\, x = 0 \text{ y } y = 0 \}$.

Ejemplo:

1. Para las rotaciones: $L: \Re^2 \to \Re^2$ donde $L(\mathbf{v}) = R_\alpha \mathbf{v}$, para todo $\mathbf{v} \in \Re^2$.

La IMAGEN es todo el plano porque cualquier punto del plano al ser rotado por un ángulo α dado, se convierte en otro punto del plano. Por definición:

$$L\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

El NÚCLEO es **o** porque es el único punto que rotado cualquier ángulo permanece fijo.

$$L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{o}$$

2. Para las proyecciones sobre una recta: $L: \Re^2 \to \Re$ donde L(x, y) = (x, 0) .

Al hacer la proyección de todos los puntos del plano sobre una recta N, en dirección paralela a otra recta M que pasa por el origen **o**, el plano se reduce a la recta N y todos los puntos sobre la recta M quedan sobre el punto **o** = (0, 0) (figura 6.9):

La IMAGEN es la recta sobre la cual se hace la proyección, puesto que para todo punto del plano su imagen es un punto sobre la recta. Si el conjunto es una parte del plano la imagen es un intervalo de la recta.

El NÚCLEO es el conjunto de todos los puntos del plano, que están sobre la recta M que intersecta en **o** a la recta N sobre la cual se hace la proyección.

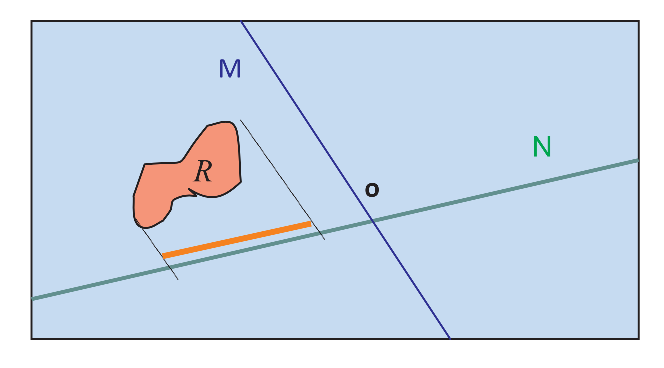


Fig. 6.9

3. Para la derivada de una función:

La IMAGEN es el conjunto de funciones g(x) que son "la derivada" de alguna función derivable f(x), es decir: Im(L) = { g(x) / g(x) = f´(x) }

El NÚCLEO es el conjunto de todas las funciones constantes, porque la derivada de una constante es cero: Ker(L) = { f(x) / f(x) = c }.

4. Para la multiplicación por una matriz fija:

Si A es matriz de orden nxs, la IMAGEN de una matriz M de orden mxn está dada por L(M) = M_{mxn} A_{nxs} = B_{mxs} , entonces: Im(L) = { B / B $\in \Re_{mxs}$}.
El NÚCLEO de la transformación es la matriz nula de orden mxn porque el producto de 2 matrices es la matriz nula si una de ellas es la matriz nula: Ker(L) = { O_{mxn} }.

Nota: Si L: V $\rightarrow$ W es una transformación lineal, la imagen de L es un subconjunto del conjunto de llegada W (figura 6.7) y el núcleo es un subconjunto del dominio V (figura 6.8).

Definición: Si L: V $\rightarrow$ W es una transformación lineal

Se llama RANGO de L a la dimensión de la imagen de L. Se denota rang(L).
Se llama NULIDAD de L a la dimensión del Kernel de L. Se denota: nul(L).

Teorema: Si L: V $\rightarrow$ W es una transformación lineal donde V es espacio vectorial de dimensión n, entonces:

$$\text{nul}(L) + \text{rang}(L) = n$$

Esto quiere decir que la dimensión de dominio de una transformación lineal es igual a la suma de las dimensiones del rango y el núcleo de la transformación.

Ejemplo:

Si L: $\Re^3 \longrightarrow \Re^4$ se define como: L(x, y, z) = (x-2y+z, 3x-5y+5z, 5x-9y+7z, 0) , calcular el rango y la nulidad de L.

Solución:
Calculamos primer el núcleo de L:

Si L(x, y, z) = (0, 0, 0, 0) , entonces: $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x-5y+5z=0 \\ 5x-9y+7z=0 \end{cases}$

Resolviendo este sistema de ecuaciones por el método de reducción de Gauss-Jordan se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 5 & -9 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
, lo que implica que hay infinitas soluciones.

Solución general: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, donde $z = r$, por tanto:

Ker(L) = { (x, y, z) / $z=r$, $x=-5r$ y $y=2r$ }= { $(-5r, 2r, r)$ / $r\in\Re$}.

Entonces una base del Ker(L) es {(-5, 2, 1)}, luego nul(L) = 1 y por el teorema se concluye que rang(L) = 2.

Ejercicios propuestos:

1. Determine cuáles de las transformaciones dadas son lineales:
a) T: $\Re^2 \rightarrow \Re^2$ definida por $T(x, y) = (2x-y, x)$.
b) T: $\Re^3 \rightarrow \Re^2$ definida por $T(x, y, z) = (x+1, y+z)$.
c) T: $P_3 \rightarrow P_2$ definida por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + a_2x + a_3x^2$.
d) T: $M_n \rightarrow M_n$ definida por T(X) = AX – XA (matrices de orden n) .

2. En cada caso encuentre el núcleo de la transformación lineal dada:
a) L: V → V definida por L(**v**) = **v**, para todo **v**∈V.
b) L: $P_3 \rightarrow P_2$ definida por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.
c) L: $M_n \rightarrow M_n$ definida por $T(X) = X^T$.

3. Determine la imagen de las siguientes transformaciones lineales:
a) L: V → V definida por L(**v**) = **v**, para todo **v**∈V
b) L: $\Re^2 \rightarrow \Re^2$ definida por $L(x, y) = (x-y, x+y)$

4. En cada caso, determine el rango y la nulidad de la transformación lineal:
a) L: $\Re^3 \rightarrow \Re^3$ definida por $L(x, y, z) = (x+z, 0, y+x)$.
b) L: $\Re^3 \rightarrow \Re^3$ definida por $L(x, y, z) = (x, 3y, 5x)$.

c) L: $\Re^3 \to \Re^2$ definida por $L(x, y, z) = (x, y+z)$.

d) L: $M_2 \to M_2$ definida por L(X) = XA donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Si L: $\Re^3 \to \Re^2$ es una transformación lineal definida por $L(x, y, z) = (x+y, y+z)$, encuentre una base y la dimensión de: (a) la imagen (b) el núcleo

6.1.3. Representación matricial

Cualquier transformación lineal L: V → W, donde V y W son espacios vectoriales de dimensión finita, puede ser representada matricialmente. El objetivo de esta sección, es establecer un método que permita encontrar dicha matriz.

Es importante retomar de la unidad anterior el concepto de base para un espacio vectorial, así como el de coordenadas de un vector.

Si V es un espacio vectorial de dimensión n, una base para V es un conjunto $B = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \}$ formado por n vectores linealmente independientes.

Definición: Dada una base B del espacio vectorial V, si un vector $\mathbf{v} \in V$ se expresa como combinación lineal de los elementos de B en la forma:

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n.$$

Se dice que las coordenadas del vector **v** en la base B son $c_1, c_2, \ldots, c_n$

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix}$$ se llama VECTOR COORDENADO de **v** en la base B

De esta manera, se establece una correspondencia entre el espacio vectorial V y $\Re^n$ en términos de la base B.

Para los propósitos de este módulo vamos a trabajar, en principio, con las llamadas bases naturales (o canónicas) de los espacios vectoriales correspondientes. Así por ejemplo en el espacio vectorial M_2 formado por las matrices de orden 2, la base natural es

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ejemplos:

1. La matriz **v** = $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ expresada como C.L. de los vectores de B es:

$$4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

por tanto su vector coordenado en la base B es [**v**]$_B$ = $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

2. Si el espacio vectorial es P_2 formado por los polinomios de grado menor o igual a dos, la base canónica es $B = \{1, x, x^2\}$

El polinomio p(x) = $3 + 7x - 6x^2$ de P_2 se expresa como 3.1+7.x – 6. x^2

entonces su vector coordenado en la base $B = \{1, x, x^2\}$ es [p]$_B$ = $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$.

3. Consideremos ahora el espacio vectorial M_{22} pero con una base diferente

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y el vector **C** = $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -15 & 4 \end{pmatrix}$

el vector coordenado de **C** en la base B [**C**]$_B$, se encuentra resolviendo el sistema de ecuaciones lineales que resulta de la correspondiente combinación lineal de **C** en términos de los elementos de la base B:

C = $a\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La solución de este sistema es: a = 2 , b = 1 , c = -3 , d = 4 , luego [**C**]$_B$ = $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

4. En P_1 tomar la base B = {2, 3t } y encontrar el vector coordenado de $q(t)=7-2t$ en la base B

Solución:

Se expresa el polinomio $q(t)$ como C.L. de los polinomios de B: $a(2)+b(3t)=7-2t$ y se obtiene: $a=\frac{7}{2}$; $b=\frac{-2}{3}$, entonces: $[q]_T=\begin{pmatrix} 7/2 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

Ahora estamos en condiciones de proporcionar un método para encontrar la matriz asociada a una transformación lineal:

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión n y m respectivamente.
Sea L: V $\rightarrow$ W una transformación lineal.
Sean B ={ $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, . . . , $\mathbf{v}_n$ } base para V y P = { $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$, . . ., $\mathbf{t}_m$ } base para W.

Afirmamos que existe una matriz A de orden mxn tal que L(**v**) = A[v $]_{B.}$

A[**v** $]_B$ se define como el producto entre la matriz A de orden mxn y la matriz [**v** $]_B$ de orden nx1.

A[**v** $]_B$ es una matriz de orden mx1, que corresponde a [L(**v**)$]_P$, es decir la matriz de coordenadas de L(**v**) en la base P.

Algoritmo: (para hallar la matriz asociada a una transformación lineal).

- Encontrar la imagen por L de cada elemento de B: L($\mathbf{v}_1$), L($\mathbf{v}_2$), . . . , L($\mathbf{v}_n$).
- Expresar cada una de estas imágenes como C.L. de los elementos de la base P.
- Resolver el sistema de ecuaciones que resulta y formar los vectores coordenados siguientes: [L($\mathbf{v}_1$)$]_P$, [L($\mathbf{v}_2$)$]_P$, . . . , [L($\mathbf{v}_n$)$]_P$.
- Formar la matriz A tomando cada vector coordenado como columna de A .

Ejemplos:

1. L: $\Re^3 \rightarrow \Re^2$ definida por T(x, y, z) = (x, y) con las bases naturales:

B = $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ para $\Re^3$ y P = $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ para $\Re^2$.

Solución:

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\ L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};\ L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Con las bases naturales, se obtienen directamente las coordenadas en P.

De esta manera se forma la matriz: $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}_{2X3}$

Para ilustrar la forma como opera la matriz A , tomemos un vector cualquiera

$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ directamente $L(\mathbf{v})=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ ahora veamos con la matriz A.

$$L(\mathbf{v})=L\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}_{2X3}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}_{3X1}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}_{2X1}.$$

2. Encontrar la matriz asociada a la transformación lineal $\Re^2\rightarrow\Re^3$ definida por

$L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2y\\2x+y\\x+y\end{pmatrix}$ con respecto a las bases B = $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ en $\Re^2$ y

P = $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ en $\Re^3$.

Solución:

Se busca la imagen por L de cada uno de los elementos de B:

$$L\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\ \text{y}\ L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

Ahora expresemos cada vector $\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ como combinación lineal de los

elementos de la base P:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las soluciones de los 2 sistemas de ecuaciones que se forman con las anteriores C.L. corresponden respectivamente a los vectores coordenados de $L\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en la base P. Con estos vectores se forma la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 & -4/3 \\ -2/3 & 5/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

A es la matriz que representa a la transformación lineal. Veamos como actúa sobre un vector cualquiera, por ejemplo $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Las coordenadas de **v** en la base B se obtienen al resolver:

$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donde $[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$.

efectuamos el producto $A.[\mathbf{v}]_B$ para obtener $[L(\mathbf{v})]_P$:

$$A.\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 & -4/3 \\ -2/3 & 5/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/3 \\ 37/3 \\ -10/3 \end{pmatrix}$$

Este resultado es $[L(\mathbf{v})]_P$ el vector de coordenadas de $L(\mathbf{v})$ en la base P.

$$L(\mathbf{v}) = -\frac{8}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{37}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{10}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\13\\9\end{pmatrix}$$ es el mismo resultado que se tiene al aplicar directamente la transformación L al vector **v**:

$$L\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-2.5\\2.4+5\\4+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\13\\9\end{pmatrix}$$

3. Encontrar la matriz asociada a la transformación lineal $L: \Re^3 \to \Re^2$ definida por $L(x, y, z) = (x, y+z)$ respecto a las bases: B = { (1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1) } y B´ = { (2, 1); (-1, 1) }

Solución: Encontremos primero la imagen por L de los elementos de B.

L(1, 0, 0) = (1, 0) ; L(0, 1, 0) = (0, 1) ; L(0, 0, 1) = (0, 1).

Expresemos cada uno de estos resultados como combinación lineal de los elementos de la base B´.

$a(2,1)+b(-1,1)=(1,0)$.
$c(2,1)+d(-1,1)=(0,1)$.
$e(2,1)+f(-1,1)=(0,1)$.

Se forman 3 sistemas de ecuaciones lineales cuyas matrices aumentadas se pueden resumir en la matriz: $\left(\begin{array}{cc|ccc}2 & -1 & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$.

Con las soluciones de los 3 sistemas de ecuaciones se forma la matriz A asociada a la transformación lineal: $A = \begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3\\-1/3 & 2/3 & 2/3\end{pmatrix}$.

Observemos como actúa A sobre un vector cualquiera, como v = (2, 3, 4).

Directamente: L(**v**) = (2, 3+4) = (2, 7).

Utilizando la matriz A: $L(\mathbf{v}) = A\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 2 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

este resultado es el vector coordenado de L(**v**) en la base B´: $L[(\mathbf{v})]_{B'}$

3(2,1) + 4(-1,1) = (2,7) = L(**v**).

Nota: el resultado final es el mismo que se obtiene al hacer el proceso directamente.

4. Hallar la representación matricial de la transformación lineal $L: \Re^2 \rightarrow \Re^3$ definida por $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+y \\ y \end{pmatrix}$ respecto a las bases B_1 = {(2, 1) , (1, 2)} de $\Re^2$ y

B_2 = {(1, -1, 0) , (0, 2, 0) ,(0, 2, 5)} de $\Re^3$. Evaluar $L\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ con la matriz asociada.

Solución: Se busca la imagen por L de cada vector de B_1:

$$L\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{w}_1 \; ; \; L\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{w}_2.$$

Se expresa cada imagen como combinación lineal de los vectores de B_2 :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Se calculan los vectores coordenados de $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ resolviendo los sistemas de ecuaciones que se forman.

La matriz aumentada para los 2 sistemas de ecuaciones es: $\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right)$

y su forma reducida es $\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$, entonces $[\mathbf{w}_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $[\mathbf{w}_1]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

La representación matricial de L es $A_{3x2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, porque:

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+y \\ y \end{pmatrix}$$

Al evaluar $L\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ directamente tenemos: $L\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. Encontrar la representación matricial para la transformación lineal $L: \Re^3 \to \Re^2$

definida por $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+z \\ -2x+2y-2z \end{pmatrix}$, respecto a las bases canónicas.

{(1, 0, 0) ; (0, 1, 0) ; (0, 0, 1)} de $\Re^3$ y {(1, 0) ; (0, 1)} de $\Re^2$

Solución:
Se calculan las imágenes de cada vector de la base de $\Re^3$:

$$L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{w}_1 \; ; \; L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{w}_2 \; ; \; L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{w}_3$$

Se expresa cada una de las imágenes en términos de la base de $\Re^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se obtienen los vectores coordenados de cada vector de $\Re^2$:

$$[\mathbf{w}_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \; ; \; [\mathbf{w}_2]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \; ; \; [\mathbf{w}_3]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Se forma la matriz de la transformación con los vectores coordenados:

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+z \\ -2x+2y-2z \end{pmatrix}$$

Ejercicios propuestos:

1. Si L es una transformación lineal tal que: $L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ y $L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$

Encuentre: $L\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$.

2. Halle la matriz asociada a cada una de las siguientes transformaciones lineales respecto a las base P y Q dadas:

a) L: $\Re^3 \rightarrow \Re^2$ definida por : $L\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y+z\\y-3z\end{pmatrix}$; P = $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$; Q = $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$

b) L: $\Re^3 \rightarrow \Re^2$ definida por: $L\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\3x-z\end{pmatrix}$; P = $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}\right\}$; Q = $\left\{\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right\}$

c) L: $\Re^2 \rightarrow \Re^3$ definida por: $L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\x\\x+y\end{pmatrix}$; Q = $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$; P = $\left\{\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right\}$

d) L: $\Re^3 \rightarrow \Re^3$ definida por T(x, y, z) = (x+2y, y-z, x+y) ; P = {(2, 3, 5); (0, 0, 1); (1, 1, 2)}
Q = {(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)}

3. Sea B = {(2, -1); (5, 3)} una base de $\Re^2$ y B´= {(1, 0, 1); (0, 1, 2); (3, 1, 0)} una base de $\Re^3$. Si A = $\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 0\\1 & 4\end{pmatrix}$ es la matriz asociada a la transformación L: $\Re^2 \rightarrow \Re^3$ respecto a las bases B y B´ halle:

a) L[(2, -1)] b) L[(5, 3)] c) $[\,\mathbf{v}\,]_B$ si $\mathbf{v}$ = (-4, -9)

6.2. VALORES Y VECTORES PROPIOS

En el planteamiento de muchos problemas de las ciencias aplicadas como la física mecánica, la biología o la economía, la solución del problema demanda la identificación de vectores **v** que cumplan la condición de ser paralelos a un vector A**v**, donde A es una matriz cuadrada asociada a una transformación lineal. Tal es el caso del cambio de sistema de coordenadas propuesto por Euler, para describir el estudio del movimiento planetario con ecuaciones más sencillas.

Los vectores propios de una matriz A son aquellos que multiplicados por la matriz, producen un múltiplo escalar del vector. Los escalares que satisfacen la condición enunciada para cada vector, son los llamados valores propios de la matriz A.

6.2.1. Valores y vectores propios de una matriz

Definición: Dada una matriz A cuadrada de orden n, un valor de λ para el cual la ecuación matricial A**v** = λ**v** tiene solución, con **v** $\neq$ **0**, se llama VALOR PROPIO o VALOR CARACTERÍSTICO de A.

Las correspondientes soluciones de la ecuación para cada valor de λ se llama VECTOR PROPIO o VECTOR CARACTERÍSTICO de A.

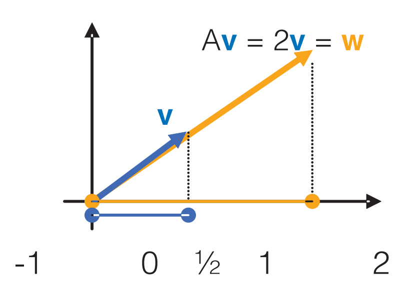


Para un mismo valor propio de la matriz A existen diferentes vectores propios, pero todos ellos son paralelos entre sí.

NOTA: Los valores y vectores propios también se conocen como **eigenvalores y eigenvectores** respectivamente.

A la ecuación A**v** = λ**v** se le llama **problema de valor característico** y para hallar sus soluciones, si **v** $\neq$ **0**, la ecuación se expresa de la forma $(\lambda I - A)$ **v** = 0 .

La ecuación $\det(\lambda I - A) = 0$ se llama **ecuación característica** de A, $\det(\lambda I - A)$ es un polinomio de variable λ y se llama **polinomio característico** de A.



La ecuación $(\lambda I - A)$ **v** = 0 representa un sistema lineal homogéneo (S.L.H.), para el cual $(\lambda I - A)$ es la matriz de coeficientes y **v** es el vector que se forma con las variables (ver sección 2.1.2).

El sistema tiene infinitas soluciones (**v** ≠ **0**) si el determinante de la matriz de coeficientes es cero, es decir si $\det(\lambda I - A) = 0$.

El conjunto de vectores solución para cada valor de λ se llama **espacio característico de A respecto al valor propio** λ y se denota E_λ

Teorema: Si A es matriz cuadrada de orden n, λ es valor propio de A si y solo si λ es solución real de la ecuación característica de A, $\det(\lambda I - A) = 0$.

Ejemplos:

1. Hallar los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Solución:

Primero se escribe el polinomio característico de la matriz $\det(\lambda I - A)$:

$$\lambda I - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -2 \\ -1 & \lambda - 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 \\ -1 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 5) - 2 = \lambda^2 - 9\lambda + 18$ es el **polinomio característico.**

$\Rightarrow \lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$ es la **ecuación característica.**

Por tanto los **valores propios** de A son: $\lambda=3$ y $\lambda=6$.

Los respectivos vectores propios se obtienen reemplazando en la ecuación $Av = \lambda v$ y resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones:

- Para $\lambda = 3$ se tiene: $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donde $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que se expresa como:

$(3I - A)\,\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un S.L.H. con infinitas soluciones de la forma:

$x + 2y = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Entonces para $\lambda = 3$ el conjunto de vectores propios de A son todos los múltiplos escalares del vector $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, es decir $E_3 = \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

- Para $\lambda = 6$ se tiene: $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, donde $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

Entonces: $(6I - A)\,\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un S.L.H. con infinitas soluciones de la forma: $x - y = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Entonces para $\lambda = 6$ el conjunto de vectores propios de A son todos los múltiplos escalares del vector $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es decir $E_6 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

2. Hallar los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 15 \\ -2 & -6 & -9 \end{pmatrix}$

Solución:

Escribimos la ecuación característica de A:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda - 10 & -15 \\ 2 & 6 & \lambda + 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Entonces $\lambda(\lambda - 1)^2 = 0$ es la ecuación característica de A y los valores propios son $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$.

Para $\lambda = 0$ se tiene: $(0I - A)$ **v = 0** $\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -10 & -15 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -\frac{2}{3}y \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $E_0 = \left\{ \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \right\}$ es el espacio característico de A para $\lambda = 0$.

Para $\lambda = 1$ se tiene: $(1I - A)$ **v = 0** $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -9 & -15 \\ 2 & 6 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + 3y + 5z = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y - 5z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Por tanto: $E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \right\}$ es el espacio característico de A para $\lambda = 1$.

Ejercicios propuestos:

1. Encuentre los valores propios y sus correspondientes vectores y espacios característicos para cada una de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$. **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. **c)** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Pruebe que la matriz $\begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ no tiene valores propios para $0 < \theta < \pi$

3. Pruebe que si λ es un valor característico de una matriz invertible A, entonces λ^{-1} es un valor característico de A^{-1}

6.2.2. Semejanza y diagonalización

Recordemos que toda transformación lineal se puede representar por medio de una matriz, por lo tanto dos matrices semejantes son representaciones matriciales diferentes de la misma transformación lineal.

Definición: Dos matrices cuadradas A y B del mismo orden se llaman SEMEJANTES o SIMILARES si existe una matriz invertible C tal que $A = C^{-1}BC$.

Considerando las matrices A y B como representaciones matriciales de la misma transformación lineal en diferentes bases, la matriz C de la definición no es otra cosa diferente a la matriz de transición entre las dos bases.

Por otra parte si A es semejante a B entonces B también es semejante a A dado que si $A = C^{-1}BC \Rightarrow CA = BC$ y B se puede expresar como $B = (C^{-1})^{-1}AC^{-1}$.

Teorema: Dos matrices semejantes A y B tienen la misma ecuación característica.

Demostración:

Si A y B son semejantes entonces existe una matriz C invertible tal que:

$$
\begin{aligned}
A = C^{-1}BC \Rightarrow \det(\lambda I - A) &= \det(\lambda I - C^{-1}BC). \\
&= \det(\lambda C^{-1}C - C^{-1}BC). \\
&= \det(C^{-1}\lambda C - C^{-1}BC). \\
&= \det(C^{-1}(\lambda C - BC)) . \\
&= \det(C^{-1}(\lambda I - B)C) . \\
&= \det(C^{-1})\det(\lambda I - B)\det(C). \\
&= \det(C^{-1})\det(C)\det(\lambda I - B). \\
&= \det(\lambda I - B).
\end{aligned}
$$

NOTA: Dos matrices semejantes tienen los mismos valores propios por tener la misma ecuación característica, pero no necesariamente tienen los mismos vectores propios.

Ejemplos:

1. Verificar que las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -20 & 7 \end{pmatrix}$ son semejantes utilizando la matriz $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

Utilizando la definición de matrices semejantes con la matriz C dada se debe cumplir:

$$C^{-1}AC = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -12 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -20 & 7 \end{pmatrix}$$

lo cual prueba que las matrices son semejantes.

Otra forma de verificar que las matrices son semejantes es aplicar el teorema anterior, en tal caso se debe verificar que las dos matrices tienen la misma ecuación característica:

Ecuación característica de A: $\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 \\ 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3) = 0$

Entonces: la ecuación para A es $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

Ecuación característica de B: $\det(\lambda I - B) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 \\ 20 & \lambda-7 \end{vmatrix} = (\lambda 22)(\lambda-7) + 20 = 0$

Entonces: la ecuación para B es $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, la misma de la matriz A.

Definición: Una matriz cuadrada A de orden n es DIAGONALIZABLE si es semejante a una matriz diagonal.

Por definición, A es diagonalizable si existe una matriz invertible C tal que $C^{-1}AC = D$ matriz diagonal, en tal caso se dice que C **diagonaliza** a A.

NOTA: Si una matriz A es diagonalizable, puede ser semejante a diferentes matrices diagonales, dado que el conjunto de vectores propios linealmente independientes, para cada valor propio, no son únicos.

Teorema: Una matriz A cuadrada de orden n es diagonalizable si y solo si tiene n vectores propios linealmente independientes.

Según el teorema, para diagonalizar una matriz se debe verificar primero que existan n vectores propios linealmente independientes, en caso contrario la matriz no es diagonalizable.

Si una matriz A de orden n tiene n vectores propios $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n$ linealmente independientes, la matriz C que la diagonaliza se obtiene tomando como columnas cada uno de los vectores $\mathbf{v}_i$, y como los vectores son L.I. la matriz C es invertible.

Ejemplo:

Decidir si la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ es diagonalizable. Si lo es diagonalizarla.

Solución:

Primero se obtienen los vectores propios para saber si se cumple la condición del teorema

Ecuación característica: $\begin{vmatrix} \lambda+1 & 4 & 1 \\ 0 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-1)=0.$

Entonces los valores propios de A son $\lambda= -1$, $\lambda= 2$, $\lambda= -1$.

Ahora veamos los vectores propios:

Para $\lambda= -1$ se tiene $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Para $\lambda= 2$ se tiene $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda= 1$ se tiene $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Como los tres vectores propios de A son linealmente independientes, la matriz es diagonalizable y la matriz C que diagonaliza a A es $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y su inversa es

$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz se daigonaliza efectuando el producto $C^{-1}AC$ y el resultado debe ser una matriz diagonal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicios propuestos:

1. Decida si cada una de las siguientes matrices es diagonalizable:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **.** **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **.** **c)** $\begin{pmatrix} 9 & -40 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$ **.** **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Encuentre la matriz que diagonaliza cada una de las siguientes matrices

a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$**.** **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ **.** **c)** $\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3/2 & 3/2 & 5/2 \end{pmatrix}$.

3. Diagonalizar cada una de las siguientes matrices

a) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$**.** **b)** $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$**.** **c)** $\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3/2 & 3/2 & 5/2 \end{pmatrix}$.

4. Probar que si dos matrices A y B son semejantes entonces det(A) = det(B).

5. Determine condiciones para que la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sea diagonalizable.

RESUMEN

Una transformación lineal (T.L.) es una función $L: V \to W$ que asigna a cada vector $\mathbf{v} \in V$, un único vector $\mathbf{w} \in W$ (denotado L ($\mathbf{v}$)) tal que:
- $L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.
- $L(\lambda.\mathbf{u}) = \lambda.\, L(\mathbf{u}) \quad \forall\, \mathbf{u} \in V$ y $\forall \lambda \in \Re$.

L conserva la estructura algebraica de los dos conjuntos V y W, es decir:
- $L(\mathbf{o}_V) = \mathbf{o}_W$ la imagen del módulo de V es el módulo de W.
- $L(-\mathbf{u}) = -L(\mathbf{u})$ el opuesto de $\mathbf{u} \in V$ es el opuesto de $L(\mathbf{u}) \in W$.

Si V y W son espacios vectoriales de dimensión n y m respectivamente, toda transformación lineal $L: V \to W$ se puede definir por medio de una matriz A de orden mxn.

El **núcleo** de $L: V \to W$ es el conjunto de vectores en V que tienen como imagen al vector nulo de W : $Ker(L) = \{ \mathbf{v} \in V / L(\mathbf{v}) = \mathbf{o}_W \}$; $Ker(L) \subset V$. La **nulidad** de L es la dimensión del núcleo y se denota nul (L).

La **imagen** de $L: V \to W$ es el conjunto de vectores en W que son imagen de algún vector de V: $Im(L) = \{ \mathbf{w} \in W / L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ para algún $\mathbf{v} \in V \}$; $Im(L) \subset W$. El **rango** de L es la dimensión de la imagen y se denota rang (L).

Si $L: V \to W$ es una transformación lineal donde V es espacio vectorial de dimensión n, entonces: nul (L) + rang (L) = n.

Si B es una base ordenada del espacio vectorial V y $\mathbf{v} \in V$, en la C.L
$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$, las constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ son las **coordenadas** de $\mathbf{v}$ en la base B .

El **vector coordenado** de $\mathbf{v}$ respecto a B se forma con las coordenadas de $\mathbf{v}$

Se denota: $$[\mathbf{v}]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix}.$$

La **matriz asociada** T a la transformación lineal $L: V \to W$ respecto a 2 bases ordenadas $B = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \}$ de V y $B' = \{ \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_n \}$ de W, es la matriz cuyas columnas son :

$[L(\mathbf{v}_1)]_{B'}$ $[L(\mathbf{v}_2)]_{B'}$ . . . , $[L(\mathbf{v}_n)]_{B'}$, los vectores coordenados respecto a B´ de la imagen por L de cada vector de B_1. Se denota $[T]_{BB'}$.

El proceso consiste en:

- Encontrar la imagen por L de cada elemento de B: L($\mathbf{v}_1$), L($\mathbf{v}_2$), . . . , L($\mathbf{v}_n$)
- Expresar cada una de estas imágenes como C. L. de los elementos de la base B´ para hallar el vector coordenado $[L(\mathbf{v}_i)]_{B'}$ de cada L($\mathbf{v}_i$).
- Escribir la matriz asociada: $[T]_{BB'} = ([L(\mathbf{v}_1)]_{B'} \ [L(\mathbf{v}_2)]_{B'} \ . . . \ [L(\mathbf{v}_n)]_{B'})$.

Un **vector característico** de una matriz cuadrada A, es un vector **v** que satisface la ecuación $Av = \lambda\mathbf{v}$, es decir, es un múltiplo escalar de A**v**. Un vector característico también recibe el nombre de **vector propio o eigenvector.**

Un **valor característico** de una matriz A es un escalar λ para el cual $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Un valor característico también recibe el nombre de **valor propio o eigenvalor**.

Si $\lambda_1, \lambda_2, . . . , \lambda_m$ son valores propios de una matriz A_n, los correspondientes vectores propios $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, . . . , \mathbf{v}_m$ para cada uno de ellos, son linealmente independientes ($m \leq n$).

Dos **matrices** A y B son **semejantes** si y solo si, existe una matriz C invertible, tal que $B = C^{-1}AC$.

Si A y B son matrices asociadas a la misma transformación lineal respecto a diferentes bases, la matriz C que satisface la definición de semejanza entre las matrices es precisamente la matriz de transición o de cambio entre las dos bases.

Dos matrices semejantes tienen las mismas ecuaciones características y los mismos valores propios, pero no necesariamente los mismos vectores propios.

Una **matriz** A de orden n es **diagonalizable** si existe una matriz invertible C tal que $C^{-1}AC$ es una matriz diagonal.

Una matriz A de orden n es diagonalizable si tiene n valores propios diferentes.

Una matriz A de orden n es diagonalizable si tiene n vectores propios linealmente independientes.

Para **diagonalizar** una matriz A de orden n se realiza el siguiente proceso:

- Hallar los valores propios de la matriz A.
- Si A no tiene n vectores propios L. I. la matriz no es diagonalizable.
- Si A tiene n vectores propios L. I. se forma la matriz C que diagonaliza a A cuyas columnas son los vectores propios.
- Se efectúa el producto $C^{-1}AC$.

GLOSARIO

Transformación lineal (T.L.) es una función entre espacios vectoriales que conserva la estructura.

Núcleo de una T. L. es el conjunto de vectores que tienen como imagen al vector nulo.
Nulidad de una T. L. es la dimensión del núcleo.

Imagen de una T. L. es el conjunto de vectores que son imagen de otro vector.

Rango de la T. L. es la dimensión de la imagen.

Vector coordenado de v respecto a B es el que se forma con las coordenadas de **v** en la base B.

Matriz asociada a una T. L. respecto a 2 bases ordenadas B_1 y B_2 es la matriz cuyas columnas son, los vectores coordenados respecto a B_2 de la imagen por la T. L. de cada vector de B_1.

Vector característico de una matriz A es un vector **v** paralelo al vector A**v**.

Valor característico de una matriz A es el escalar para el cual el vector característico **v** cumple la condición de ser paralelo a A**v**.

Matrices semejantes son las que definen la misma transformación lineal respecto a bases diferentes.

Matriz diagonalizable es una matriz semejante a una matriz diagonal.

AUTOEVALUACIÓN

Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

1. T: $\Re^3 \to \Re^2$ definida por T$(x, y, z) = (x, y+z)$ es una transformación lineal.

2. T: $\Re^2 \to \Re^2$ definida por T$(x, y) = (x^2, 2y)$ no es una transformación lineal.

3. Si L es una transformación lineal entonces L(**u.v**) = L(**u**).L(**v**).

4. Si A_{5x4} , L(**u**) = A **u** es una transformación lineal de $\Re^4$ en $\Re^5$.

5. Si L es una transformación lineal de V en W, la imagen de L es W.

En cada caso seleccione la respuesta correcta:

6. L: $\Re^2 \to \Re^3$ definida como $L(x, y) = (x, y, 1)$ geométricamente es:

(a) cualquier plano paralelo al plano XY.
(b) una recta paralela al eje X que corta al eje Z en 1.
(c) una recta paralela al eje Y que corta al eje Z en 1.
(d) un plano con ecuación $z = 1$.

7. Si L una transformación lineal para la cual $L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ y $L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\\5\end{pmatrix}$, entonces:

$L\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ es igual a:

(a) $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix}-4\\8\\22\end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix}-14\\4\\24\end{pmatrix}$ **(d)** con esa información no se puede calcular.

8. Si L: $P_1 \to P_2$ es una transformación lineal definida por L(p(x)) = x.p(x) la matriz asociada a L respecto a las bases canónicas de P_1 y P_2 es:

(a) $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ **(d)** $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$

9. Si L: $\Re^3 \to \Re^3$ esta definida por $L(x, y, z) = (x+2y-z, y+z, x+y-2z)$, el rango y la nulidad de L respectivamente son:

(a) 1 y 2 **(b)** 2 y 1 **(c)** 3 y 0 **(d)** 0 y 1

10. Las coordenadas del punto (3, 2) cuando se rota un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ rad en sentido antihorario son:

(a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$ **(b)** $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$ **(c)** $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ **(d)** $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$

RETROALIMENTACIÓN

Respuestas a los ejercicios propuestos.

Sección 6.1.1. (página 310): **1.** L: $\Re^2 \to \Re^2$ tal que L(x, y) = (x, mx+b) donde y = mx+b es la recta sobre la cual se hace la proyección.

2. L(x, y, z) = (x, z) es la transformación lineal que proyecta el espacio $\Re^3$ sobre el plano XZ ; L(x, y, z) = (y, z) proyecta a $\Re^3$ sobre el plano YZ.

3. a) No es lineal porque $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \neq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ b) Si es lineal porque T(**u**+**v**) = T(**u**)+T(**v**) c) No es lineal: si A y B son matrices de orden 2, T(A+B) ≠ T(A) + T(B) d) No es lineal porque T(p(x)+q(x))≠T(p(x))+ T(q(x)) e) Si es lineal porque: (A_1+A_2).B = (A_1B+A_2B y (kA).B = k(A.B) **4.** (-10, -7, 6)

Sección 6.1.2. (página 315): **1.** a) si b) no c) si d) si **2.** a) { o } b) { p(0) } c) { O_n } **3.** a) V b) $\Re^2$ **4.** a) rango 2 y nulidad 1 b) rango 3 y nulidad 0 c) rango 2 y nulidad 1 d) rango 4 y nulidad 0 **5.** a) base: {(1, -1, 1)} y rango 1 b) {(1, 0);(0, 1)} y nulidad 2

Sección 6.1.3. (página 324): **1.** $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}$ **2.** a) $\begin{pmatrix} 3 & 7/5 & 16/5 \\ 0 & 4/5 & 2/5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 27 & -3 \\ 2 & -37 & 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 76 & 118 \\ -7 & -11 \\ -20 & -30 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Solución Autoevaluación Unidad 6: (página 336)

1. La afirmación es verdadera. Si T(x, y, z) = (x, y+z) entonces:

$$\begin{aligned} T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) &= (x_1+x_2, (y_1+y_2)+(z_1+z_2)) \\ &= (x_1, y_1+z_1) + (x_2, y_2+z_2) \\ &= T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) \end{aligned}$$

$T(k(x, y, z)) = (kx, k(y+z)) = (kx, ky+kz) = kT(x, y, z)$

2. La afirmación es **verdadera**. Si $T(x, y) = (x^2, 2y)$ entonces:

$$T(x_1+x_2, y_1+y_2) = ((x_1+x_2)^2, 2(y_1+y_2)) \text{ , pero:}$$
$$T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) = (x_1^2, 2y_1) + (x_1^2, 2y_1)$$
$$= (x_1^2+x_2^2, 2y_1+2y_2)$$
$$\neq((x_1+x_2)^2, 2(y_1+y_2)) = T(x_1+x_2, y_1+y_2)$$

3. La afirmación es **falsa**. Esta condición no es necesaria para que una transformación sea lineal. Si la transformación se define multiplicando por una matriz fija, ni siquiera es posible efectuar el producto $L(\mathbf{u}).L(\mathbf{v})$.

4. La afirmación es **verdadera**. Si L es una transformación lineal de $\Re^4$ en $\Re^5$.

$L(\mathbf{u}) = A\,\mathbf{u} = \mathbf{v}$, donde $\mathbf{u}\in\Re^4$ y $\mathbf{v}\in\Re^5$, entonces: $A_{5x4}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = B_{5x1}\in\Re^5$. Además:

$L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$ y $L(k\mathbf{u}) = A(k\mathbf{u}) = kL(\mathbf{u})$

5. La afirmación es **falsa**. Si $L: V\to W$ la imagen de L está contenida en W, pero no necesariamente todos los elementos de W son imagen de algún elemento de V.

6. La respuesta correcta es **d)**. Por definición, la transformación a todo punto (x, y) del plano, le asigna el punto $(x, y, 1)$ que es un punto del espacio levantado una unidad respecto a (x, y). El conjunto de todos esos puntos forman entonces un plano paralelo al plano XY a una altura de una unidad, cuya ecuación es $z = 1$.

7. La respuesta correcta es **c)**. Sabemos que si $L: V\to W$ es una transformación lineal y $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es la base canónica de V, entonces L queda definida en forma única por la matriz cuyas columnas son: $L(\mathbf{u}_1); L(\mathbf{u}_2); \ldots, L(\mathbf{u}_n)$. En este caso de $L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

y $L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$,concluimos que la matriz asociada a la transformación L es: $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

,entonces: $L\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 4 \\ 24 \end{pmatrix}$.

8. La respuesta correcta es **a)**. La base canónica de P_1 es { 1, x } y en forma vectorial {(1, 0); (0, 1)}, entonces L(1) = x y L(x) = x^2. La base canónica de P_2 es { 1, x, x^2 } y en forma vectorial {(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)}, entonces $L(1) = x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $L(x) = x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por tanto, la matriz asociada a L respecto a la dos bases canónicas es: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. La respuesta correcta es **b)**. Calculamos el núcleo de la transformación que por definición es L(x, y, z) = (0, 0, 0); como L(x, y, z) = (x+2y-z, y+z, x+y-2z) se forma el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$ cuya solución general es: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De lo anterior se concluye que el núcleo está generado por un solo vector y por tanto su dimensión es 1, en consecuencia la nulidad de L es 1 y por teorema (pag. 272) el rango es 2.

10. La respuesta correcta es c). Para el ángulo de $\frac{\pi}{4}$ rad = 45^0 la matriz de rotación en sentido antihorario es $\begin{pmatrix} \cos 45^0 & -sen 45^0 \\ sen 45^0 & \cos 45^0 \end{pmatrix}^{-1}$ entonces las coordenadas del punto rotado están dadas por:

$$\begin{pmatrix} \cos 45^0 & -sen 45^0 \\ sen 45^0 & \cos 45^0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^0 & sen 45^0 \\ -sen 45^0 & \cos 45^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{-3}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Por tanto, al rotar el punto (3, 2) un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ rad en sentido antihorario las nuevas coordenadas son: $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right)$

BIBLIOGRAFÍA

GARETH WILLIAMS, Álgebra Lineal con Aplicaciones. Editorial Mc Graw – Hill, 2002

GERBER HARVEY, Algebra Lineal. Grupo Editorial Iberoamericano, 1990.

HOWARD ANTON, Introducción al Álgebra Lineal. Editorial Limusa, 2003.

KOLMAN BERNARD, Algebra Lineal. Editorial Pearson, 1996.

NAKOS G. / JOYNER D. , Álgebra Lineal con Aplicaciones. Thomson Editores, 1999.

STANLEY GROSSMAN, Algebra Lineal. Editorial Mc Graw – Hill, 1996.

UNIVERSIDAD MILITAR NUEVA GRANADA
Departamento de Matemáticas
2009

RECONOCIMIENTOS

Este libro fue elaborado a partir de la necesidad de proporcionar a los estudiantes del programa de Ingeniería Civil en la modalidad de educación a distancia, un material de estudio que facilite su proceso de aprendizaje, a través de una presentación agradable y didáctica sin sacrificar el grado de rigurosidad de los contenidos. La elaboración del texto final demandó jornadas extensas de cuidadosa revisión en los aspectos relevantes para el logro de los objetivos propuestos, tanto en la formación profesional bajo la modalidad de educación a distancia, como en la asignatura Álgebra Lineal.

Agradezco la colaboración de mis colegas **William Becerra y Lucía Gutiérrez**, por sus aportes iniciales en la primera fase del trabajo desarrollado, a **Olga Camacho y Aurora Velasco** por la lectura crítica del texto con algunas recomendaciones.

Al ingeniero **Jorge Corredor** por su apoyo permanente e incondicional, para que este trabajo sea hoy un libro de texto para los estudiantes de la Universidad.

Hago extensivos mis agradecimientos a la señoras Gina Peñalosa y Sandra Zabala por su colaboración en la impresión cuidadosa de la primera copia.

ALGEBRA LINEAL







